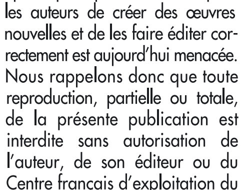
ÉLECTRICITÉ

EXERCICES ET MÉTHODES

Yves Granjon
Professeur à l'université de Lorraine

DUNOD

Illustration de couverture : Bundles of cables - © salita2010 - Fotolia.com



11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076592-8

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage rassemble l'ensemble des éléments essentiels de l'électrocinétique généralement enseignée au cours des premiers cycles scientifiques et technologiques. Il est structuré en sept chapitres qui traitent des notions fondamentales des circuits électriques en régimes continu, sinusoïdal et transitoire.

La présentation de cet ouvrage a été conçue de manière à aborder les différentes notions de manière progressive : au sein de chaque chapitre, le lecteur découvrira d'abord, en quelques pages, l'essentiel du cours où les connaissances indispensables sont présentées, sans démonstration, de manière claire et précise. Il sera ensuite confronté à de nombreux exercices, de difficultés variées. Des simples applications du cours aux cas plus originaux, en passant par des thèmes très classiques, les exercices et problèmes permettront au lecteur de se familiariser avec les bases de l'électricité, puis, en abordant des sujets plus complexes, d'acquérir suffisamment de recul et de savoir-faire pour résoudre avec succès n'importe quel problème d'électrocinétique.

Tous les exercices et problèmes sont entièrement corrigés, la résolution étant systématiquement présentée dans tous ses détails. De nombreux commentaires attireront l'attention de l'étudiant sur les pièges à éviter, sur les techniques à acquérir absolument et sur les astuces lui permettant de progresser plus rapidement.

Il est conseillé de traiter l'ensemble des exercices dans l'ordre, de ne pas négliger tel ou tel qui semble facile, et de ne pas succomber trop rapidement à la tentation de lire la solution. La maîtrise des circuits électriques est indissociable de l'effort fourni à rechercher soi-même les solutions des problèmes proposés.

Au fur et à mesure de sa progression, le lecteur deviendra de plus en plus familier avec les techniques de résolution et acquerra suffisamment de méthode pour aborder avec aisance des problèmes de plus en plus en plus sophistiqués.

L'électrocinétique n'est pas une discipline extrêmement difficile pour qui l'aborde avec rigueur et méthode. Les concepts mathématiques nécessaires sont relativement simples et concernent notamment la trigonométrie, le calcul différentiel et intégral et les nombres complexes. Les formules de mathématiques essentielles sont regroupées au sein d'un formulaire dans les pages qui suivent.

Il est recommandé au lecteur de toujours veiller à respecter les conventions de signes, de sens des flèches de tension ou de courant et d'utiliser systématiquement les unités du système international.

Cet ouvrage ayant été conçu avec le souci constant de la pédagogie et la volonté de rendre les concepts de l'électrocinétique accessibles à chacun, je souhaite que tout étudiant en ayant fait l'acquisition puisse y trouver les clés de sa réussite.

Yves Granjon

Généralités sur les circuits électriques. Lois de Kirchhoff en régime continu

1

Mots-clés

▪ courant ▪ tension ▪ dipôles passifs ▪ dipôles actifs ▪ résistance ▪ bobine ▪ condensateur ▪ association en série ▪ association en parallèle ▪ auto-inductance ▪ capacité ▪ convention récepteur ▪ convention générateur ▪ lois de Kirchhoff ▪ loi des nœuds ▪ loi des mailles générateurs ▪ régime continu ▪ pont diviseur de tension

Du montage le plus basique au système le plus complexe, tous les circuits électriques obéissent aux mêmes lois simples qui, au final, sont peu nombreuses. Pour être appliquées avec efficacité et conduire aisément à la résolution de problèmes parfois ardus, ces lois doivent être connues et utilisées avec la plus grande rigueur. En particulier, il convient de respecter un certain nombre de conventions sans lesquelles l'approche de cette résolution serait impossible. Ce premier chapitre a pour objectif de familiariser le lecteur avec les outils les plus fondamentaux, dans le cadre du régime de fonctionnement le plus simple : le régime continu.

Définitions et principes fondamentaux

D'une manière générale, tout circuit électrique peut se représenter sous la forme d'un *générateur* d'énergie alimentant un *récepteur* chargé de transformer l'énergie électrique reçue en une autre forme exploitable, les deux dispositifs étant reliés par des conducteurs.

Le fonctionnement d'un circuit électrique est décrit par un transfert de charges entre ces deux éléments (figure 1.1). Il est couramment admis de représenter ce transfert par un flux d'électrons que l'on modélise par un courant électrique traversant les conducteurs. Ce courant électrique (exprimé en ampères) représente la quantité de charges q (en coulombs) traversant une section donnée du conducteur par unité de temps, soit :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

Les électrons possédant une charge négative, la logique veut que le courant i soit représenté en sens contraire du flux d'électrons.

Dans un circuit composé d'une seule *boucle*, le même courant circule à chaque instant dans tout le circuit.

Générateurs et récepteurs simples possèdent en général deux bornes. Ce sont des **dipôles électriques**. Les dipôles générateurs sont dits **actifs**, ceux qui ne font que consommer de l'énergie sont des **dipôles passifs**.

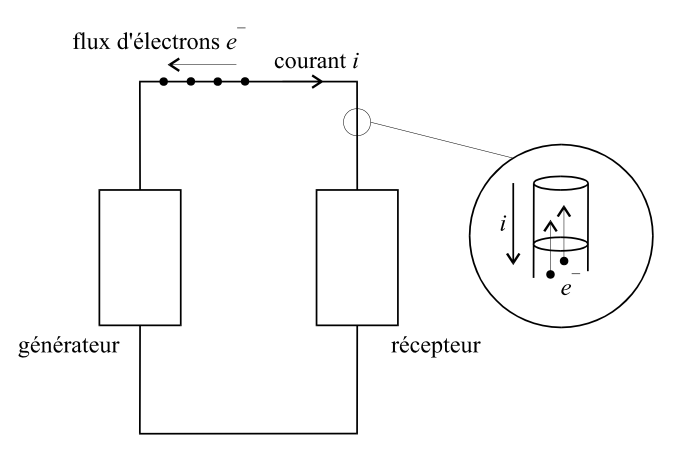


Figure 1.1

Les dipôles actifs les plus fréquemment rencontrés (figure 1.2) sont :

- Le **générateur de tension parfait**, qui délivre une tension e (en volts) et l'impose au dipôle récepteur qui présente donc à ses bornes la même tension e. Le courant qui apparaît alors dans le circuit dépend de e et du récepteur. Cette tension e est la différence de potentiel $V_A - V_B$. La flèche symbolisant cette différence de potentiel est dirigée vers le potentiel le plus élevé. Comme les électrons sont attirés par le point correspondant au potentiel le plus élevé (A), le courant sera orienté, au sortir du générateur, par une flèche dirigée vers le potentiel le plus élevé.

* Le **générateur de courant parfait**, qui impose un courant i au dipôle récepteur. La tension qui apparaît alors aux bornes du dipôle récepteur dépend de i et du récepteur.

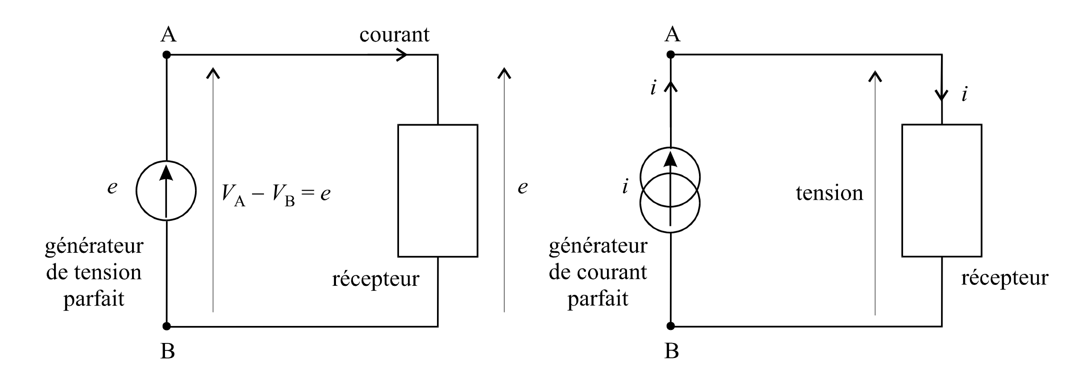


Figure 1.2

Pour un circuit alimenté par un générateur de tension, on considère en général que sa borne B constitue la référence de tension pour l'ensemble du circuit et se trouve donc au potentiel 0 V (on dit aussi *à la masse*).

Sa borne A se trouve donc au potentiel $V_A = e$. On assimile donc toute différence de potentiel entre un point X quelconque et cette référence, au potentiel du point X.

Les générateurs sont dits *parfaits* au sens où la tension délivrée par un générateur de tension parfait ne dépend pas du reste du circuit. De même, un générateur de courant parfait délivre un courant qui ne dépend pas du reste du circuit.

Dans la réalité, les générateurs ne sont pas parfaits et on considère qu'un modèle plus proche de la réalité consiste à associer une résistance en série avec un générateur de tension parfait, ou une résistance en parallèle avec un générateur de courant parfait. Ces résistances sont appelées **résistances internes** des générateurs (figure 1.3).

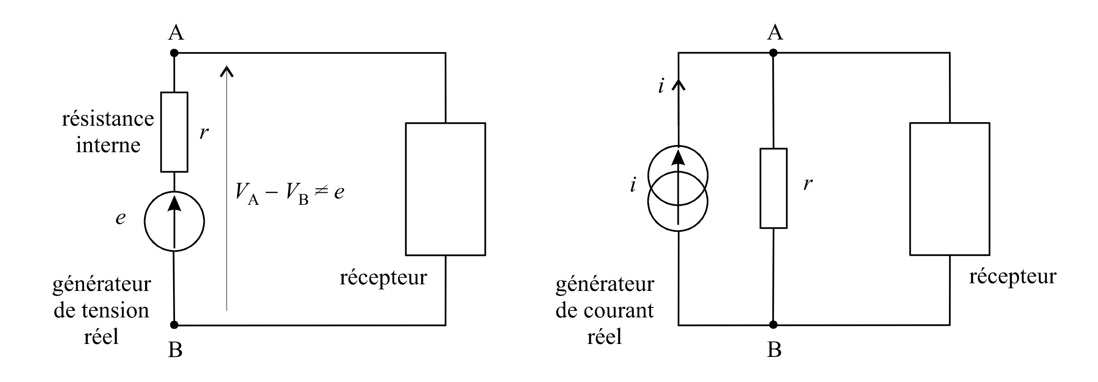


Figure 1.3

Fiche 2

Conventions

Dans un circuit simple composé d'un générateur de tension et d'un dipôle récepteur, compte tenu du fait que la même tension règne aux bornes des deux éléments, et que le même courant circule dans tout le circuit, on note que du côté du générateur, courant et tension sont représentés par des flèches dirigées dans le même sens, alors que du côté du récepteur, elles sont dirigées en sens contraires (figure 1.4).

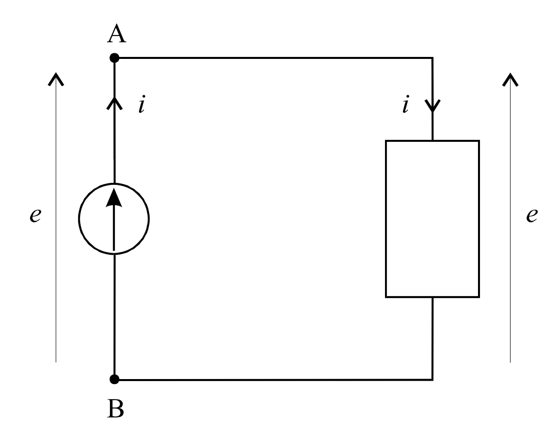


Figure 1.4

Par convention, nous dirigerons systématiquement les flèches des courants et des tensions dans le même sens pour le générateur (convention générateur), et en sens contraires pour tout récepteur (convention récepteur).

En règle générale, un circuit comprend un seul générateur. Toutefois, certains peuvent en contenir plusieurs. Dans ce cas, si un générateur est considéré comme appartenant à la partie réceptrice du circuit, c'est la convention récepteur que nous utiliserons.

Fiche 3

Dipôles passifs linéaires

Trois dipôles passifs sont couramment utilisés dans les circuits électriques. Ils ont la particularité de posséder un fonctionnement qui s'exprime sous la forme d'une équation différentielle simple, linéaire, à coefficients constants.

L'équation de fonctionnement d'un dipôle lie la tension à ses bornes et le courant qui le traverse. En supposant que, dans le cas le plus général, ces deux grandeurs sont variables dans le temps, les lois de fonctionnement des trois dipôles passifs usuels sont présentées sur la figure 1.5.

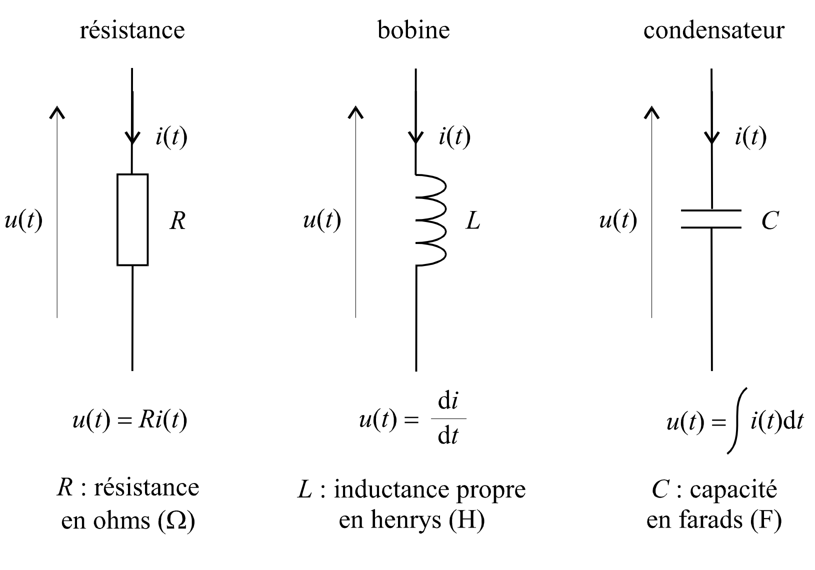


Figure 1.5

La loi de fonctionnement d'une résistance est appelée **loi d'Ohm**.

Fiche 4

Associations de dipôles

Deux dipôles quelconques sont dits **associés en série** si une des bornes de l'un est relié à une des bornes de l'autre, l'ensemble formant un nouveau dipôle.

Ils sont dits **associés en parallèle** si les paires de bornes sont connectées deux à deux (figure 1.6).

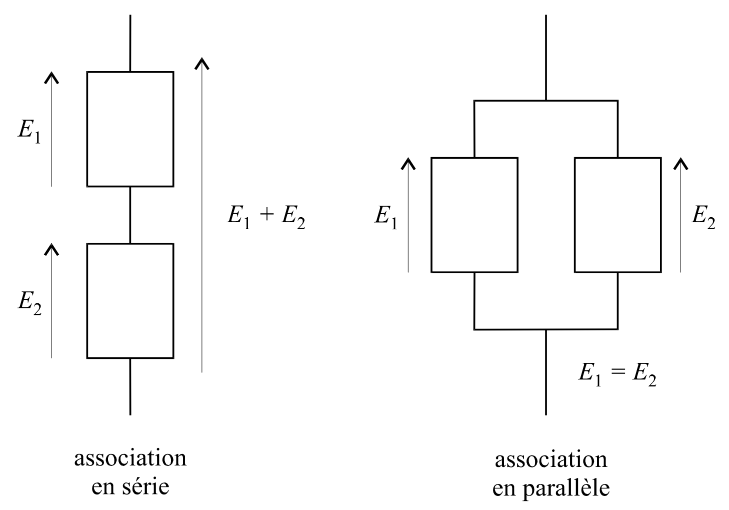


Figure 1.6

Dans le cas de l'association en série, les deux dipôles sont parcourus par le même courant. La tension totale aux bornes de l'ensemble est égale à la somme des deux différences de potentiel aux bornes de chacun des deux dipôles. Dans le cas de l'association

en parallèle, la même différence de potentiel règne aux bornes de chacun des deux dipôles.

En associant des résistances on forme un dipôle qui se comporte comme une résistance, dont la valeur est appelée **résistance équivalente**. Il en est de même en associant des condensateurs. La figure 1.7 présente quelques associations usuelles très simples.

On remarquera que les règles d'associations des résistances et celles d'associations des condensateurs se trouvent inversées.

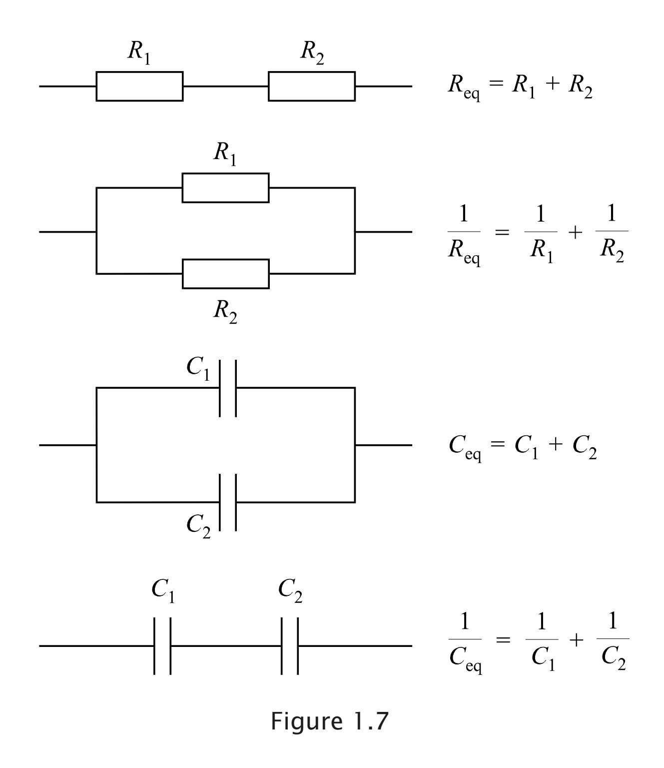


Figure 1.7

Fiche 5

Régimes électriques

Selon la forme de la tension (ou du courant) délivrée par le générateur qui alimente un circuit, on dit que ce circuit fonctionne selon un certain régime :

- s'il délivre une tension constante, le circuit fonctionne en **régime continu**. Les grandeurs continues seront notées avec des lettres majuscules (E pour une tension par exemple).
- s'il délivre une tension variable au cours du temps, nous serons dans le cas d'un **régime variable** et on désignera les grandeurs par des lettres minuscules : $e(t)$, par exemple.
- si la tension délivrée est sinusoïdale : $e(t) = E_0 \cos \omega t$, le **régime** sera dit **sinusoïdal** ou **harmonique**.

Les régimes continus et sinusoïdaux font partie des **régimes** dits **permanents** ou établis. Souvent, les régimes variables surviennent lorsqu'un circuit passe d'un état permanent à un autre. On parle alors de **régimes transitoires**.

Dans un circuit en régime continu, les tensions et courants dans le circuit sont en général continus. Dans un circuit en régime sinusoïdal, tensions et courants sont tous sinusoïdaux, de même fréquence que la source de tension, mais présentant *a priori* des déphasages.

En régime continu, un élément inductif (une bobine) n'a aucun effet. Son équation de fonctionnement :

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

montre bien que, parcourue par un courant constant quelconque, une bobine présentera toujours une différence de potentiel nulle à ses bornes.

De même pour un condensateur, l'équation :

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

montre que si $u(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, on a bien :

$$i(t) = 0 \tag{1.4}$$

Donc, en régime continu, aucun courant ne peut traverser un condensateur. En revanche, tout condensateur qui se voit imposer une tension U présente une charge emmagasinée Q telle que :

$$Q = CU \tag{1.5}$$

Un condensateur parfait possède en outre la propriété de conserver cette charge emmagasinée, une fois retirée l'alimentation U. Ceci, bien évidemment, à condition qu'il soit isolé, c'est-à-dire que ses deux bornes ne soient reliées à aucun autre circuit.

Fiche 6

Lois de Kirchhoff en régime continu

1. Définitions

Réseau électrique. Toute association simple ou complexe de dipôles interconnectés, alimentée par un générateur.

Branche. Partie dipolaire d'un réseau parcourue par un même courant.

Nœud d'un réseau. Tout point du réseau commun à plus de deux branches.

Maille d'un réseau. Tout chemin constituant une boucle et formé de plusieurs branches.

Dans le schéma de la figure 1.8, l'association de R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5 formant le dipôle AC constitue un réseau électrique alimenté par le générateur de tension E. A, B, C et D sont les nœuds de ce réseau.

Le schéma montre trois mailles. Il en existe d'autres, par exemple, en partant du point A, on peut définir une maille qui comprend R_2, R_3, R_5, qui passe par D, puis C et qui rejoint A en incluant R_1.

2. Loi des nœuds (première loi de Kirchhoff)

La somme des courants se dirigeant vers un nœud est égale à la somme des courants qui sortent de ce nœud.

Ou encore : la somme algébrique des courants dirigés vers un nœud d'un circuit est nulle (en comptant positivement les courants dirigés vers le nœud et en comptant négativement ceux qui en sortent). Cette loi exprime le fait qu'il ne peut pas y avoir accumulation de charges en un point quelconque d'un conducteur du réseau. Dans notre exemple, on pourra écrire entre autres équations :

$$I_0 = I_1 + I_2$$
$$I_2 = I_3 + I_4$$

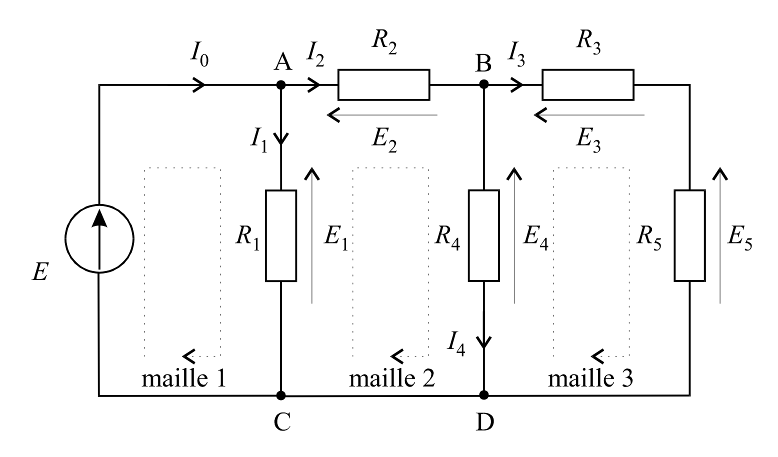


Figure 1.8

3. Loi des mailles (deuxième loi de Kirchhoff)

La somme algébrique des différences de potentiel le long d'une maille, obtenue en parcourant la maille dans un sens donné, est nulle. Les différences de potentiel orientées dans le même sens que le sens de parcours de la maille sont comptées positivement. Les différences de potentiel orientées dans le sens opposé au sens de parcours de la maille sont comptées négativement.

Ainsi, dans notre exemple :

$$\text{Maille 1 : } E - E_1 = 0$$
$$\text{Maille 2 : } E_1 - E_2 - E_4 = 0$$
$$\text{Maille 3 : } E_4 - E_3 - E_5 = 0$$

Ces lois de Kirchhoff sont présentées ici en régime continu (lettres majuscules pour les tensions et les courants). En réalité, elles restent valables quel que soit le régime. Comme ces lois de Kirchhoff, la plupart des résultats présentés dans ce rappel de cours du premier chapitre sont également valables quel que soit le régime. Toutefois, les exercices qui suivent ne concernent que des circuits en régime continu.

4. Loi des nœuds généralisée

Dans un dispositif électrique quelconque, la somme algébrique des courants entrant dans une surface fermée est nulle : $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$ (figure 1.9).

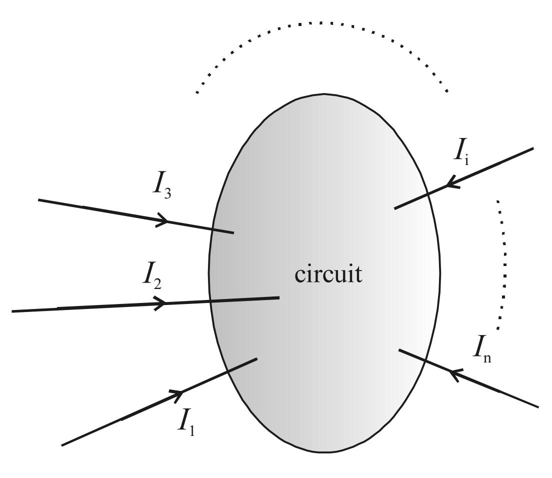


Figure 1.9

D'un point de vue pratique, cela signifie que dans un circuit complexe, on peut définir arbitrairement un contour fermé et appliquer la loi des nœuds aux bornes de ce contour. La figure 1.10 fournit un exemple d'application de cette loi des nœuds généralisée. On peut ainsi écrire directement :

$$I_0 - I_1 - I_4 - I_3 = 0$$

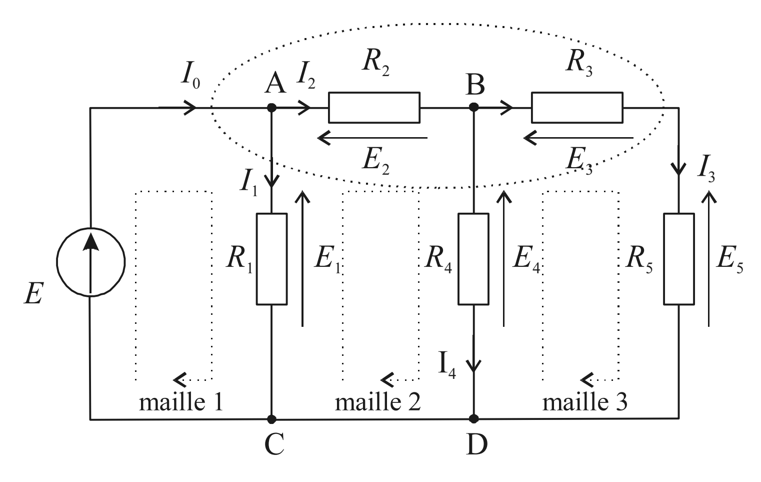


Figure 1.10

Le lecteur constatera que cette équation correspond à la combinaison des deux équations obtenues en appliquant successivement la loi des nœuds en A et en B. En appliquant la loi des nœuds généralisée, une seule opération est nécessaire pour obtenir ce résultat, au lieu de deux.

Entraînement

QCM

1. **Un générateur de tension parfait $E = 10$ V alimente une résistance $R = 100\ \Omega$. Le courant I sortant par la borne positive du générateur a pour valeur :**

❑ a. $I = -100$ mA
❑ b. $I = -10$ A
❑ c. $I = 100$ mA
❑ d. $I = 10$ A

2. **Lorsque deux résistances sont associées en parallèle, la résistance équivalente à cette association est toujours :**

❑ a. supérieure à la valeur la plus élevée des deux résistances.
❑ b. inférieure à la valeur la plus faible des deux résistances.
❑ c. inférieure à la valeur la plus élevée des deux résistances.
❑ d. supérieure à la valeur la plus faible des deux résistances.

3. **Un générateur de tension parfait $E = 10$ V alimente une résistance R réglable. On veut que le courant débité par le générateur soit égal à $I = 50$ mA. À quelle valeur faut-il régler la résistance ?**

❑ a. $R = 200\ \Omega$
❑ b. $R = 20\ \Omega$
❑ c. $R = 500\ \Omega$
❑ d. $R = 50\ \Omega$

4. **Un générateur de tension parfait $E = 10$ V est placé aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F. Soit U la tension aux bornes du condensateur et I le courant qui le traverse. On a :**

❑ a. $U = 10$ V et $I = 0$ A.
❑ b. $U = 0$ V et $I = 0$ A.
❑ c. $U = 10$ V et $I = 0,1$ mA.
❑ d. $U = 0$ Vet $I = 0,1$ mA.

5. **Un générateur de tension parfait $E = 10$ V est placé aux bornes d'une bobine d'auto-inductance $L = 5$ mA. Soit U la tension aux bornes de la bobine et I le courant qui la traverse. On a :**

❑ a. $U = 10$ V et $I = 0$ A.
❑ b. $U = 0$ V et $I \to \infty$.
❑ c. $U = 10$ V et $I \to \infty$.
❑ d. $U = 0$ V et $I = 0$ A.

6. **Un générateur de tension parfait $E = 10$ V est placé aux bornes de l'association série d'une résistance $R = 100\ \Omega$ et d'une bobine d'auto-inductance $L = 5$ mH. Soit U_L la tension aux bornes de la bobine, U_R la tension aux bornes de la résistance et I le courant qui traverse l'ensemble. On a :**

❑ a. $U_R = 10$ V, $U_L = 0$ V et $I = 0$ A.
❑ b. $U_R = 0$ V, $U_L = 10$ V et $I = 100$ mA.
❑ c. $U_R = 0$ V, $U_L = 10$ V et $I = 0$ A.
❑ d. $U_R = 10$ V, $U_L = 0$ V et $I = 100$ mA.

7. **Un générateur de tension parfait $E = 10$ V est placé aux bornes de l'association parallèle d'une résistance $R = 100\ \Omega$ et d'une bobine d'auto-inductance $L = 5$ mH. Soit U_L la tension aux bornes de la bobine et I le courant débité par le générateur. On a :**

❑ a. $U_L = 0$ V et $I \to \infty$.

❑ b. $U_L = 0$ V et $I = 100$ mA.

❑ c. $U_L = 10$ V et $I \to \infty$.

❑ d. $U_L = 10$ V et $I = 100$ mA.

8. **Un générateur de tension réel $E = 10$ V, $r = 1\ \Omega$ est placé aux bornes d'une résistance R variable. Soit U la tension aux bornes du générateur réel, c'est-à-dire de l'ensemble $(E,\ r)$. Laquelle de ces proposition est vraie ?**

❑ a. Plus la valeur de R est faible plus la valeur de U augmente.

❑ b. Plus la valeur de R est faible plus la valeur de U diminue.

❑ c. Lorsque la valeur de R est voisine de celle de r, on a $U = 0$ V.

❑ d. Lorsque R tend vers l'infini, on a $U = 0$ V.

9. **Un générateur de tension réel $E = 10$ V, $r = 1\ \Omega$ est placé aux bornes d'une résistance $R = 9\ \Omega$.**

Soit U la tension aux bornes de R. On a :

❑ a. $U = 1$ V.

❑ b. $U = 8$ V.

❑ c. $U = 9$ V.

❑ d. $U = 10$ V.

10. **Un générateur de courant parfait alimente une résistance R quelconque. Une des propositions suivantes est fausse :**

❑ a. La tension U aux bornes du générateur de courant est nulle.

❑ b. La tension U aux bornes du générateur de courant dépend du courant qu'il débite.

❑ c. La tension U aux bornes du générateur de courant dépend de la valeur de la résistance.

❑ d. Le courant dans la résistance est indépendant de la valeur de R.

11. **Un générateur de courant parfait alimente deux résistances $R_1 = 10\ \Omega$ et $R_2 = 10\ \Omega$ placées en parallèle :**

❑ a. Les deux résistances sont parcourues par le même courant et ce courant vaut I.

❑ b. Les deux résistances sont parcourues par le même courant et ce courant vaut $I/2$.

❑ c. La tension aux bornes du générateur de courant est nulle.

❑ d. La tension aux bornes du générateur de courant est indéterminée.

12. **Un ensemble de résistances $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ et $R_3 = 20\ \Omega$ est construit comme suit : R_2 et R_3 sont associées en parallèle et R_1 est placé en série avec cette association. Le tout est alimenté par un générateur de tension parfait $E = 10$ V. Quelle est la valeur du courant I délivré par le générateur ?**

❑ a. $I = 350$ mA

❑ b. $I = 670$ mA

❑ c. $I = 860$ mA

❑ d. $I = 290$ mA

Réponses

1. **c.** La résistance est traversée par un courant $I = \frac{E}{R} = \frac{10}{100} = 0,1\ \text{A} = 100\,\text{mA}$. Le courant est bien positif si on respecte la convention générateur : il est compté positivement si on l'oriente par une flèche qui sort de la borne positive du générateur.

2. **b.** On a : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Supposons que R_1 soit la plus faible des résistances. L'expression $\frac{1}{R_{eq}}$ est bien toujours supérieur à $\frac{1}{R_1}$ puisqu'elle est la somme de $\frac{1}{R_1}$ et de $\frac{1}{R_2}$. Donc R_{eq} est bien inférieure à R_1.

3. **a.** On a $I = \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{E}{I} = \frac{10}{50 \times 10^{-3}} = 200\ \Omega$

4. **a.** Aucun courant continu ne peut traverser le condensateur. Par conséquent, $I = 0$. Quant à la tension aux bornes du condensateur, elle est la même que celle aux bornes du générateur puisque les deux éléments sont connectés l'un à l'autre.

5. **c.** En régime continu, la bobine, supposée parfaite, est équivalente à un court-circuit. Elle présentera à ses bornes la différence de potentiels imposée par le générateur mais se comportera comme une résistance infinie donc, en théorie, sera traversée par un courant infini. Dans la pratique, une bobine réelle présente toujours une résistance interne, ne serait-ce que celle des fils dont elle est constituée. Cela dit, l'intensité du courant peut être en l'occurrence très élevée.

6. **d.** La bobine se comporte comme un simple court-circuit puisque l'on est en régime continu. Tout se passe comme si le circuit n'était composé que du générateur et de la résistance. On a donc :

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10}{100} = 0,1\ \text{A} = 100\ \text{mA} \quad \text{et} \quad U_R = 10\ \text{V}.$$

La tension aux bornes de la bobine est bien évidemment nulle.

7. **c.** Le générateur impose sa tension aux bornes de la résistance comme aux bornes de la bobine. On a donc $U_L = 10$ V. Comme la bobine, en régime continu, est équivalente à un court-circuit, elle sera traversée par un courant théoriquement infini, que devra délivrer, toujours en théorie, le générateur.

8. **b.** Plus la résistance est faible, plus l'intensité I du courant dans le circuit est élevée et plus la chute de tension aux bornes de r est importante. Cette chute de potentiel est à retrancher de E et on a $U = E - rI$ qui diminue donc d'autant plus que I est élevé.

9. **c.** Le générateur alimente la résistance $R + r$ et le courant qui traverse le circuit a donc pour expression : $I = \frac{E}{r + R} = \frac{10}{1 + 9} = 1$ A. On a donc : $U = RI = 9$ V.

10. **a.** La proposition d est évidemment vraie puisque là se trouve l'intérêt de la source de courant : délivrer un courant constant quel que soit le dipôle qui lui est relié. Les trois autres propositions concernant la tension aux bornes du générateur, calculons son expression. Il s'agit de la même tension que celle qui se trouve aux bornes de la résistance puisque les deux éléments sont connectés l'un à l'autre. On a donc $U = RI$. Cela démontre que la tension U dépend à la fois de la résistance et de la source de courant, ce qui valide les propositions b et c et invalide la proposition a.

11. **b.** Il est évident que le courant I se sépare en deux courants égaux dans les deux résistances identiques et la loi des nœuds ne peut s'écrire autrement que $I = \frac{I}{2} + \frac{I}{2}$.
La proposition a est donc manifestement fausse. Quant à la tension U aux bornes du générateur, elle n'est ni nulle, ni indéterminée. Elle est imposée par la tension qui apparaît aux bornes des résistances : $U = R \times \frac{I}{2}$.

12. **c.** La résistance équivalente au montage des 3 résistances à pour expression :
$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 5 + \frac{10 \times 20}{10 + 20} = 11,67\ \Omega$, d'où $I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{10}{11,67} \approx 860$ mA.

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	Un dipôle est dit linéaire si la tension à ses bornes et le courant qui le traverse sont proportionnels.	☐	☐
2.	Le courant électrique circule positivement dans le sens opposé de celui des électrons.	☐	☐
3.	La convention récepteur appliquée aux bornes d'un dipôle impose que tension et courant soient matérialisés par des flèches orientées dans le même sens.	☐	☐
4.	En régime continu, une bobine est sans effet quelle que soit sa place dans le circuit.	☐	☐
5.	En régime continu, un condensateur présente toujours une tension nulle à ses bornes.	☐	☐
6.	Un générateur de tension parfait possède une résistance interne infinie.	☐	☐
7.	Un générateur de courant parfait possède une résistance interne infinie.	☐	☐
8.	Un condensateur chargé présente obligatoirement une tension non nulle à ses bornes.	☐	☐
9.	Dans un circuit en régime sinusoïdal, tous les courants et tensions sont sinusoïdaux.	☐	☐
10.	Dans un circuit alimenté par un générateur de tension, il ne peut y avoir que des tensions et des courants continus.	☐	☐
11.	Deux résistances placées en série sont toujours parcourues par le même courant.	☐	☐
12.	Deux condensateurs placés en parallèle sont toujours parcourus par le même courant.	☐	☐
13.	Une bobine réelle possède toujours une résistance interne.	☐	☐
14.	Un condensateur chargé ne peut perdre sa charge que si on le place aux bornes d'un circuit résistif.	☐	☐
15.	La loi des nœuds résulte du fait qu'aucune charge électrique ne peut s'accumuler en un nœud d'un circuit.	☐	☐
16.	Dans un circuit possédant 2 nœuds et 3 mailles, l'application des lois de Kirchhoff fournit un système de 5 équations distinctes.	☐	☐

Réponses

1. **Faux.** Un dipôle est linéaire si son équation de fonctionnement est une équation différentielle linéaire. Seule la résistance présente une proportionnalité entre courant et tension.
2. **Vrai.** Il s'agit là de la convention unanimement adoptée concernant le sens du courant.
3. **Faux.** C'est le contraire : tension est courant sont orientés en sens inverses.
4. **Faux.** En considérant qu'une bobine est équivalente à un court-circuit, autrement dit, un simple fil, elle peut néanmoins causer les dommages afférents généralement aux courts-circuits selon l'endroit où elle est placée. On ne peut donc pas dire qu'elle soit sans effet.
5. **Faux.** Un condensateur présente à ses bornes la tension que lui impose le reste du circuit.
6. **Faux.** C'est le contraire, plus la résistance interne est faible, meilleur est le générateur et il est considéré comme parfait si sa résistance interne est nulle.
7. **Vrai.** Ne pas oublier que l'imperfection d'un générateur de courant est modélisée par une résistance en parallèle qui doit être en théorie infinie pour ne pas perturber le courant issu du générateur.
8. **Vrai.** Charge du condensateur et tension à ses bornes sont proportionnelles. Pour avoir une tension nulle à ses bornes, le condensateur doit être déchargé.
9. **Vrai.** Même s'il existe des exemples de circuits qui transforment des signaux sinusoïdaux en signaux continus. Il s'agit de montages redresseurs qui seront étudiés au chapitre 7 consacré aux diodes.
10. **Faux.** En fait c'est quand même vrai si l'on a affaire à un circuit fonctionnant réellement en régime continu. Mais il y a des exceptions, en particulier les montages oscillateurs qui, à partir de signaux continus, peuvent générer des signaux sinusoïdaux mais dans ce cas, on ne peut plus vraiment parler de régime continu.
11. **Vrai.** De toute évidence, c'est la définition du montage en série.
12. **Faux.** La loi des nœuds s'applique à tous les types de dipôles.
13. **Vrai.** Il s'agit de la résistance des fils qui constituent la bobine. On représente alors une bobine réelle comme un dipôle constitué de l'association en série de son auto-inductance et de sa résistance interne.
14. **Faux.** Un condensateur, même isolé, finit par perdre sa charge à cause des courants de fuite dont il est le siège. Mais cela peut prendre beaucoup de temps.
15. **Vrai.** Tous les électrons qui arrivent vers un nœud en repartent systématiquement et instantanément.
16. **Faux.** S'il existe uniquement deux nœuds, l'application de la loi des nœuds sur chacun d'entre eux donnera la même équation. De même, si un circuit possède trois mailles, une de ces mailles sera en fait une combinaison des deux autres et une des trois équations sera obligatoirement une combinaison des deux autres. En l'occurrence, l'application des lois de Kirchhoff fournit trois équations indépendantes.

Exercices

1. Calcul d'une résistance équivalente*

Déterminer la résistance équivalente R_{eq} du dipôle CD représenté sur la figure 1.11.

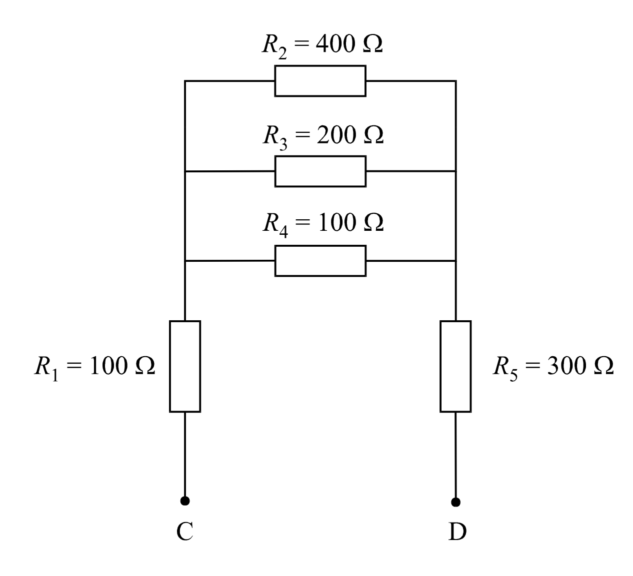


Figure 1.11

Conseil méthodologique

Pour déterminer la résistance équivalente à une association quelconque, il convient de procéder méthodiquement et de proche en proche pour réduire petit à petit la complexité du dipôle. Ici, on remarquera, pour démarrer, que les résistances R_2, R_3 et R_4 sont associées en parallèle.

2. Calcul d'une résistance équivalente*

Déterminer la résistance équivalente R_{eq} du dipôle AB représenté sur la figure 1.12.

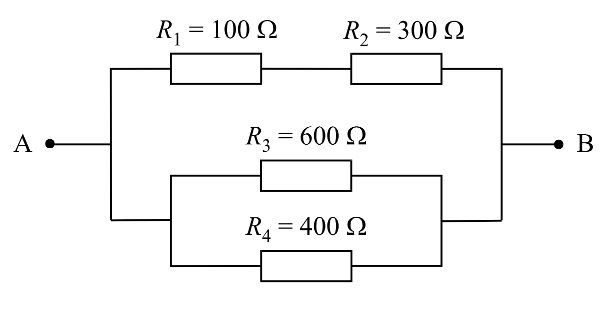


Figure 1.12

Conseil méthodologique

Commencer par isoler les associations simples : d'une part R_1 et R_2 sont associées en série et d'autre part, R_3 et R_4 sont associées en parallèle.

3. Calcul d'une résistance équivalente*

Le schéma de la figure 1.13 représente une association de quatre résistances. Déterminer la résistance équivalente du dipôle AB ainsi formé par cette association.

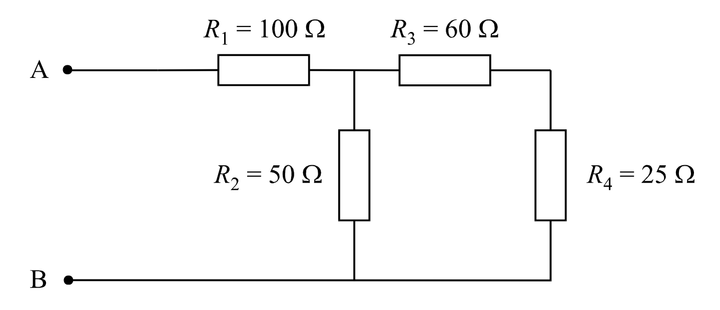


Figure 1.13

Conseil méthodologique

Les résistances R_3 et R_4 sont associées en série et forment donc une résistance équivalente qui, à son tour, est associée en parallèle avec R_2.

4. Calcul d'une résistance équivalente*

Calculer la résistance équivalente du dipôle AB représenté sur la figure 1.14.

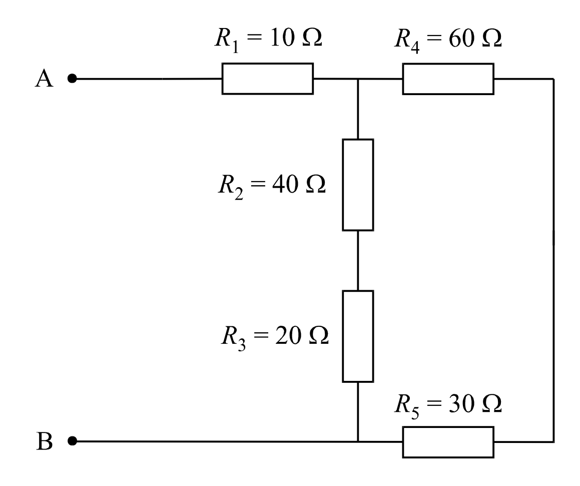


Figure 1.14

Conseil méthodologique

Procéder, comme pour les trois exercices précédents, à la recherche des associations les plus simples et réduire progressivement le circuit.

5. Calcul d'une capacité équivalente *

Calculer la capacité équivalente du dipôle AB représenté sur la figure 1.15.

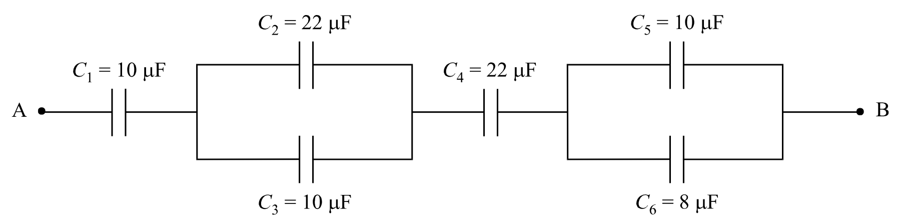


Figure 1.15

Conseil méthodologique

Comme pour les associations de résistances, chercher à réduire petit à petit le montage. Attention, les règles de calcul des associations série ou parallèle des capacités ne sont pas les mêmes que pour les résistances.

6. Calcul du courant dans un circuit à deux générateurs

Dans le schéma de la figure 1.16, le dipôle AB formé de l'association en série d'une résistance et d'un générateur parfait de tension continue U, est alimenté par un générateur parfait de tension continue $E = 15$ V. Déterminer la valeur du courant I circulant dans le circuit.

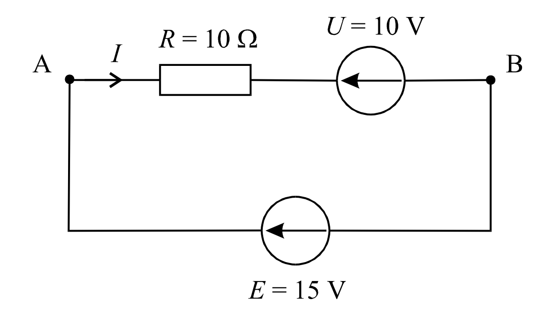


Figure 1.16

Conseil méthodologique

Commencer par placer les flèches représentant les différentes tensions dans le circuit en prenant soin de bien respecter les conventions. On obtient l'équation de fonctionnement du montage en remarquant que le générateur E impose sa tension au dipôle AB.

7. Détermination de tensions inconnues

Sur chacun des deux schémas (a) et (b) de la figure 1.17, déterminer les tensions U inconnues.

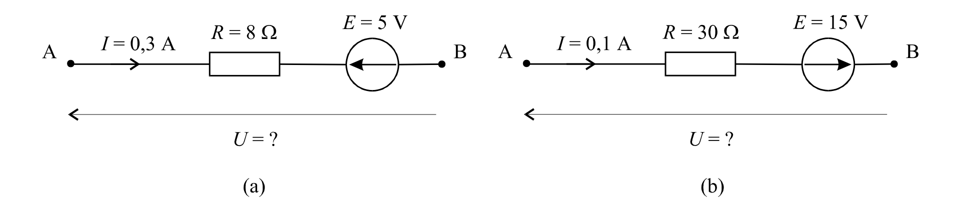


Figure 1.17

Fiches QCM Vrai ou faux Exercices 1. Généralités sur les circuits électriques ...

Conseil méthodologique

Même conseil que pour l'exercice précédent : commencer par placer les flèches représentant les différentes tensions dans le circuit en prenant soin de bien respecter les conventions et écrire, dans un cas comme dans l'autre, que la tension U est égale à la somme algébrique de deux tensions.

8. Détermination de courants inconnus *

Sur chacun des deux schémas (a) et (b) de la figure 1.18, déterminer les courants I inconnus qui circulent dans les résistances R.

On veillera particulièrement à respecter l'ensemble des conventions relatives aux orientations des diverses tensions.

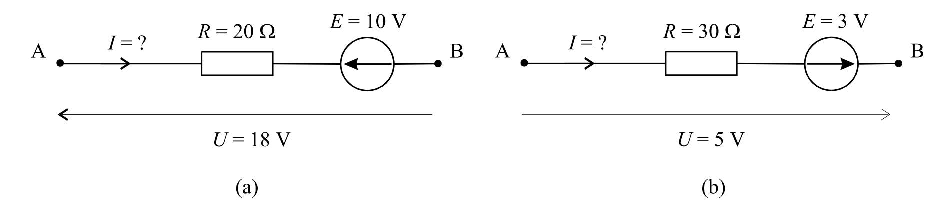


Figure 1.18

Conseil méthodologique

Procéder méthodiquement comme pour les deux exercices précédents. Le fait que l'on recherche un courant plutôt qu'une tension n'ajoute aucune difficulté.

9. Détermination de résistances inconnues *

Sur chacun des deux schémas (a) et (b) de la figure 1.19, déterminer les valeurs des résistances inconnues R.

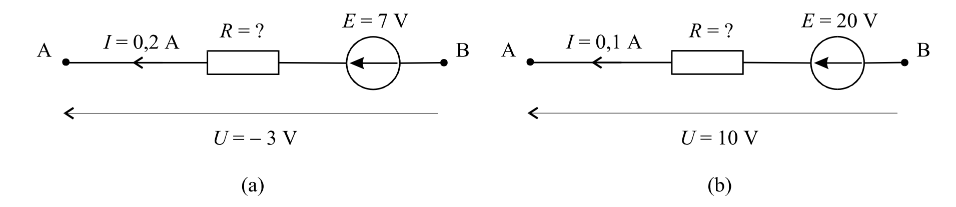


Figure 1.19

Conseil méthodologique

Là encore, bien placer les différentes différences de potentiels en respectant les conventions générateur et récepteur.

10. Calcul du courant dans un circuit à une maille **

Dans le schéma de la figure 1.20, déterminer la valeur du courant I.

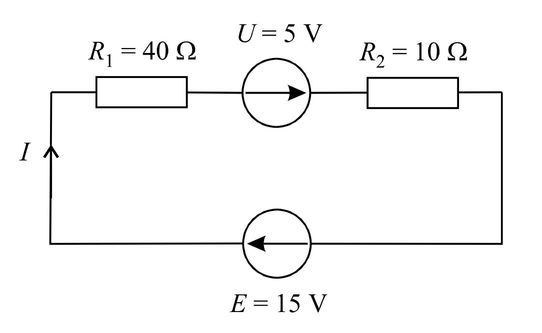


Figure 1.20

Conseil méthodologique

Le courant recherché est la seule inconnue dans le circuit. Appliquer la loi des mailles en prenant soin, au préalable, de bien orienter les flèches des différentes tensions.

11. Principe du diviseur de tension *

Dans le circuit représenté sur la figure 1.21, déterminer le potentiel V_A du point A en fonction de E, R_1 et R_2.

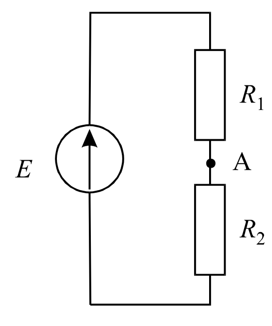


Figure 1.21

Conseil méthodologique

Déterminer d'abord l'expression du courant qui circule dans les deux résistances et en déduire le potentiel V_A.

12. Calcul de la tension aux bornes d'un générateur de courant **

Dans le montage de la figure 1.22, déterminer la valeur de la tension U aux bornes du générateur de courant.

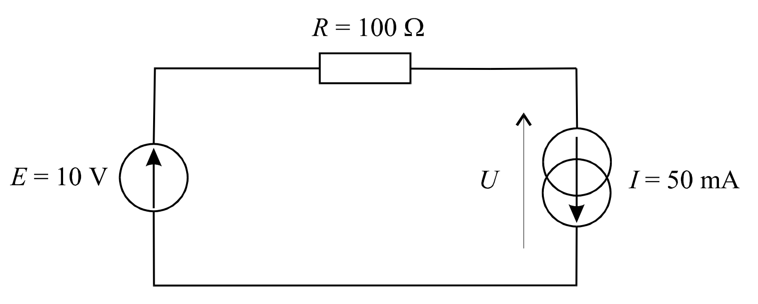


Figure 1.22

Conseil méthodologique

Dans ce circuit, le générateur de courant impose le même courant dans l'unique maille du circuit. La tension aux bornes de la résistance est donc connue ce qui permet d'en déduire la tension U.

13. Calcul d'un courant et d'une tension dans un circuit à deux mailles **

Dans le schéma de la figure 1.23, déterminer la tension U ainsi que le courant I.

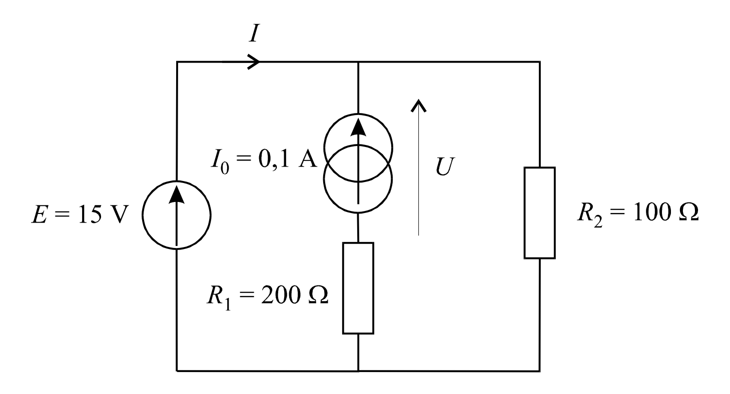


Figure 1.23

Conseil méthodologique

Dans ce circuit, le générateur E impose sa tension aux bornes des deux autres branches du circuit, ce qui conduit à deux équations qui permettent, l'une de calculer le courant dans R_2 et d'en déduire I, l'autre de calculer la tension U.

14. Calcul du courant alimentant un ensemble de résistances **

Dans le schéma de la figure 1.24, les quatre résistances ont chacune pour valeur 100 Ω. Le générateur délivre une tension $E = 20$ V.

Déterminer la valeur du courant I.

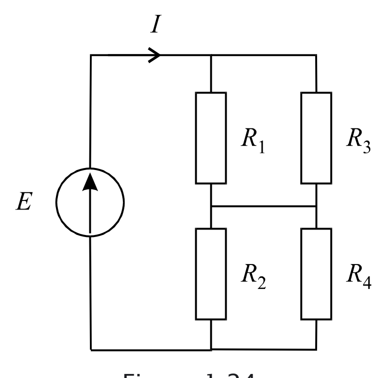


Figure 1.24

Conseil méthodologique

On cherchera la résistance équivalente au montage constitué de R_1,R_2, R_3 et R_4 en remarquant qu'elles sont associées deux à deux en parallèle.

15. Calcul du courant dans une résistance alimentée par deux générateurs *

Dans le montage de la figure 1.25, déterminer la valeur du courant I.

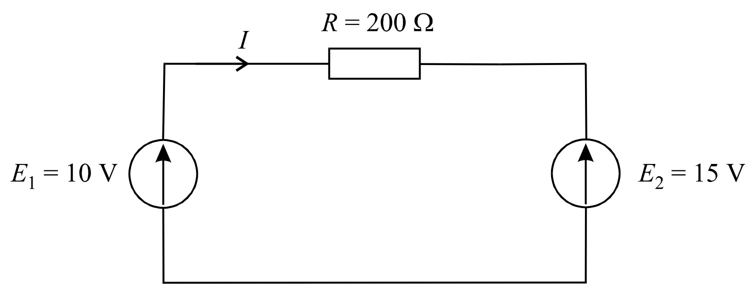


Figure 1.25

Conseil méthodologique

On utilisera la loi des mailles en ayant pris soin de bien positionner les flèches représentant les différentes tensions.

16. Calcul du courant dans un dipôle formé d'une résistance et d'un générateur **

Dans le schéma de la figure 1.26, déterminer la valeur du courant I.

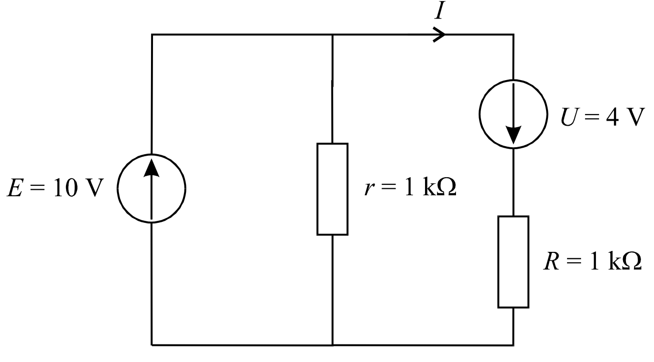


Figure 1.26

Conseil méthodologique

En observant de près le circuit, on remarque que la tension E est imposée aux deux branches du circuit. Seule celle de droite nous intéresse.

17. Calcul de la résistance équivalente d'un réseau de résistances multiples ***

Déterminer la résistance équivalente R_{eq} du dipôle AB représenté sur la figure 1.27.

Conseil méthodologique

Cette association peut paraître complexe mais en utilisant la même approche que pour les exercices 1.1, 1.2, 1.3 ou 1.4, on réduit progressivement le montage pour obtenir la résistance équivalente recherchée.

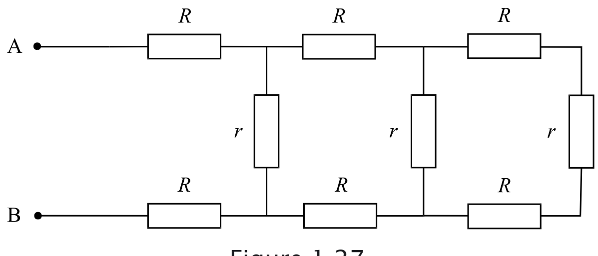


Figure 1.27

18. Étude de l'influence de la résistance interne d'un générateur réel sur la tension à ses bornes **
On considère un générateur de tension E et de résistance interne r, alimentant une résistance R. Exprimer la tension U aux bornes de R et tracer ses variations en fonction de R lorsque R varie de 0 à $+\infty$.

Conseil méthodologique

Faire le schéma correspondant au circuit proposé et placer consciencieusement les flèches représentant le courant et les différentes tensions.

19. Mesure de la résistance interne d'un générateur réel *

Un générateur de tension réel de tension E et de résistance r, inconnues toutes les deux alimente une résistance variable R.
On mesure la tension U aux bornes de R et on note :

$$U = 6 \text{ V pour } R = 3\,\Omega$$
$$U = 8 \text{ V pour } R = 8\,\Omega$$

Déterminer les valeurs de E et de r.

Conseil méthodologique

Faire le schéma correspondant au circuit proposé et placer consciencieusement les flèches représentant le courant et les différentes tensions. Former, à l'aide des informations données dans l'énoncé, un système de deux équations à deux inconnues.

20. Calcul des différents courants dans un circuit à deux mailles **

Dans le circuit de la figure 1.28, déterminer les valeurs des trois courants I_1, I_2, I_0,.

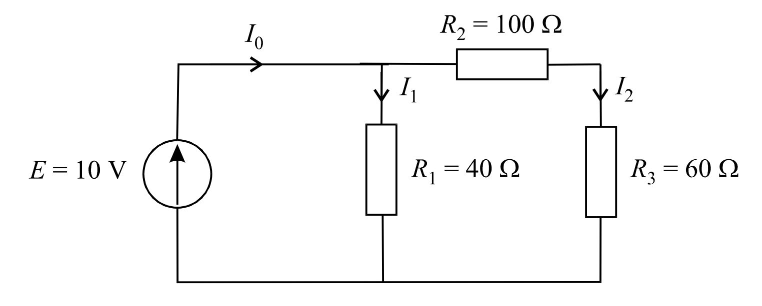


Figure 1.28

Conseil méthodologique

Exprimer simplement la loi d'Ohm aux bornes de chaque résistance afin de déterminer les courants qui la traverse.

21. Calcul des tensions dans un circuit à deux mailles **

Dans le montage de la figure 1.29, déterminer les tensions aux bornes de chacune des résistances.

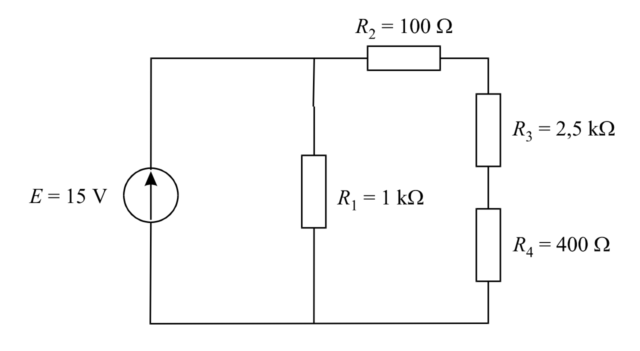


Figure 1.29

Conseil méthodologique

Nommer et placer méthodiquement les courants dans chaque branche ainsi que les tensions aux bornes de chaque résistance. Appliquer ensuite les lois de Kirchhoff.

22. Calcul des courants dans un circuit à trois mailles **

Dans le schéma de la figure 1.30, déterminer tous les courants dans les diverses branches du circuit.

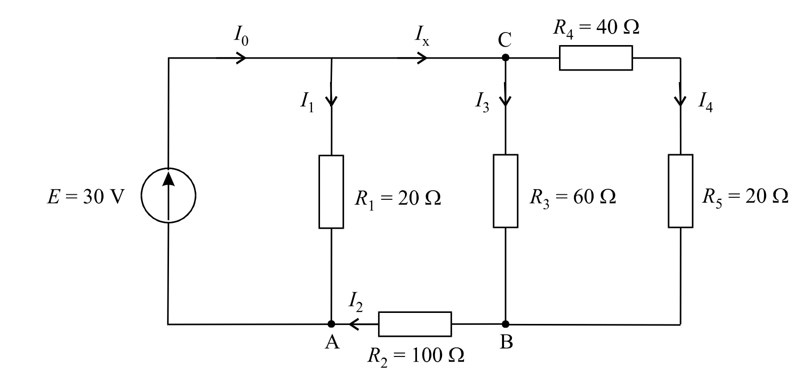


Figure 1.30

Conseil méthodologique

On commencera par calculer le courant I_1 qui est le plus immédiat à déterminer. On remarquera ensuite que la connaissance du potentiel au point C permet d'accéder aux autres courants.

23. Calcul d'un courant dans un circuit à trois mailles alimenté par deux générateurs ***

Déterminer le courant I_5 qui parcourt la résistance R_5 dans le circuit représenté sur la figure 1.31.

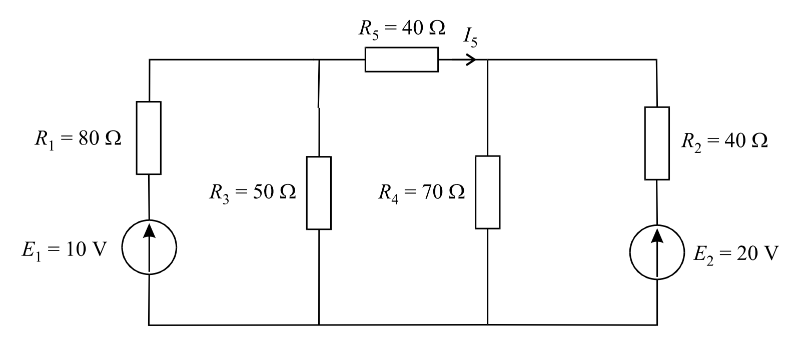


Figure 1.31

Conseil méthodologique

Comme un seul courant est recherché, on veillera à ne pas se perdre dans le dédale d'équations données par l'application des lois de Kirchhoff. Placer les courants dans les différentes branches et remplacer tout de suite les tensions aux bornes des résistances par les expressions fournies par la loi d'Ohm.

24. Étude de l'équilibre d'un pont de résistances**

On considère le montage représenté sur la figure 1.32. On cherche à déterminer la condition sur les quatre résistances R_1, R_2, R_3, R_4, de manière à ce que le courant I dans R_5 soit nul.

a. En considérant que I est nul, déterminer l'expression de V_A.

b. Déterminer de même l'expression de V_B.

c. En déduire la condition recherchée.

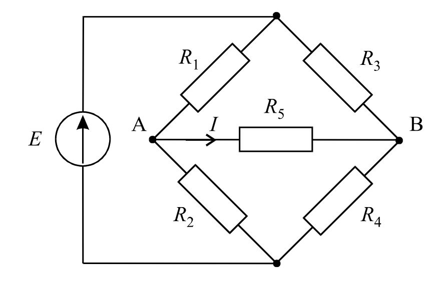


Figure 1.32

Conseil méthodologique

Bien noter que si le courant dans R_5 est nul, les résistances R_1 et R_2 sont parcourues par le même courant. Il en est de même pour les résistances R_3 et R_4.

25. Application du principe du diviseur de tension**

On considère le montage de la figure 1.33.

a. Déterminer le potentiel au point A sans utiliser les lois de Kirchhoff.

b. En déduire les courants dans les différentes branches du circuit.

c. Vérifier alors la loi des nœuds au point A.

Conseil méthodologique

On cherchera à simplifier le circuit en localisant, autant que faire se peut, les associations simples qui peuvent être réduites.

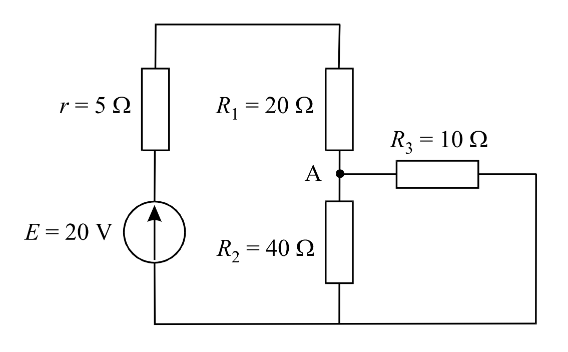


Figure 1.33

26. Calcul des tensions dans un circuit alimenté par un générateur de tension et un générateur de courant ***

Sur le schéma de la figure 1.34, on cherche à déterminer les différences de potentiel aux bornes de chacune des quatre résistances.

a. Placer les différents courants dans le circuit ainsi que les différentes différences de potentiel en respectant les conventions générateur et récepteur.

b. Appliquer la deuxième loi de Kirchhoff dans les deux mailles du circuit afin d'obtenir deux équations liant les différentes tensions.

c. Écrire la loi d'Ohm aux bornes des résistances. En déduire l'expression et la valeur de la tension aux bornes de R_4.

d. Calculer l'expression du courant débité par le générateur E.

e. En déduire les expressions des tensions aux bornes de R_1, R_2 et R_3.

f. Calculer la valeur de la tension aux bornes du générateur de courant.

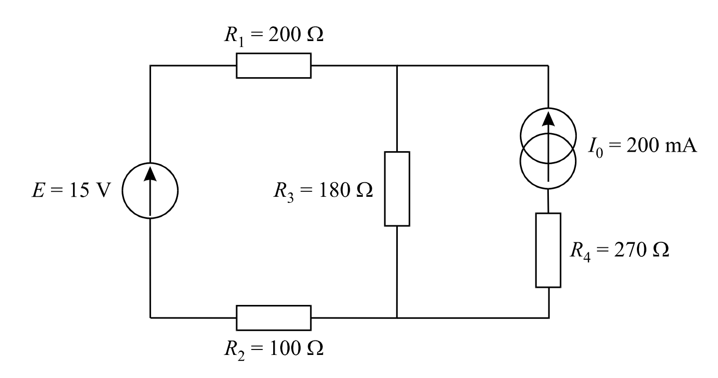


Figure 1.34

Conseil méthodologique

Le lecteur se laissera guider par les questions successives en prenant soin, au début du problème, de bien respecter le positionnement des différentes grandeurs.

27. Association parallèle de quatre dipôles semblables ***

On cherche à déterminer la tension V dans le circuit représenté sur la figure 1.35.

a. Montrer que toutes les résistances sont en fait reliées à un même nœud que l'on nommera A.

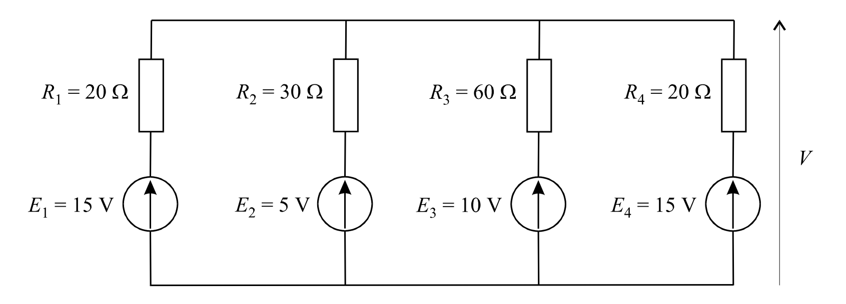


Figure 1.35

b. Appliquer la loi des nœuds au point A et déterminer l'expression de V.

Conseil méthodologique

Comme le suggère l'énoncé, il convient de mettre en évidence l'existence d'un nœud auquel sont reliées toutes les branches. Il suffit d'être observateur et de rassembler en un seul point les extrémités supérieures des quatre résistances.

Réponses

1. Les trois résistances R_2, R_3 et R_4 sont en parallèle et forment donc une résistance équivalente que nous baptiserons temporairement r, telle que :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{400} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100}$$

Soit : $r = 57{,}1\ \Omega$

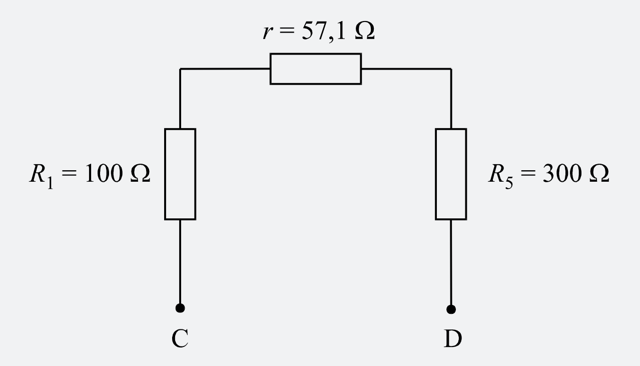


Figure 1.36

Le dipôle CD est donc équivalent à l'association en série des résistances R_1, r et R_5 (figure 1.36).

Sa résistance équivalente est donc :

$$R_{eq} = R_1 + r + R_5 = 100 + 57{,}1 + 300 = 457{,}1\ \Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : A priori, cet exercice ne présente aucune difficulté. Il convient toutefois d'être à l'aise avec ce type d'exercice qui consiste à déterminer la résistance équivalente d'un réseau résistif complexe. Il faut toujours chercher à réduire le montage progressivement en remplaçant les associations simples par leur équivalent et ce, de proche en proche.

2. Les résistances R_1 et R_2 sont en série. Leur association est équivalente à une résistance de valeur 400 Ω. Le dipôle AB se résume donc à l'association en parallèle de trois résistances, respectivement de 400 Ω, 600 Ω et 400 Ω.

On a donc :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{400} + \frac{1}{600} + \frac{1}{400}$$

D'où : $R_{eq} = 150\ \Omega$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Même commentaires que pour l'exercice 1.1. Commencer par remplacer les associations simples par leur équivalent et procéder progressivement jusqu'à la plus simple expression du dipôle.

3. Les deux résistances R_3 et R_4 se trouvent en série et forment donc une résistance équivalente de valeur 85 Ω. Cette résistance de 85 Ω est en parallèle avec R_2. Cet ensemble présente donc une résistance r telle que :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{50} + \frac{1}{85}$$

Soit : $r = 31{,}5\ \Omega$

Cette résistance r est en série avec la résistance $R1$. On a donc :

$$R_{eq} = 131{,}5\ \Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Aucune difficulté supplémentaire par rapport aux deux exercices précédents. On remarquera que les valeurs des résultats ont été arrondies. Il aurait été hors de propos de fournir un résultat avec plus de chiffres significatifs alors que les valeurs des résistances sont données à l'unité près. D'une manière générale, on choisira toujours de fournir le résultat avec une précision en cohérence avec celle des données de l'énoncé.

4. Les deux résistances R_4 et R_5 sont en série et leur association est donc équivalente à une résistance R_{45} égale à :

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 60 + 30 = 90\,\Omega$$

Il en est de même pour les deux résistances R_2 et R_3 dont l'association en série est équivalente à une résistance R_{23} telle que :

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 40 + 20 = 60\,\Omega$$

Par conséquent, le dipôle AB est équivalent à celui formé des trois résistances R_1, R_{23} et R_{45} associées comme indiqué sur la figure 1.37.

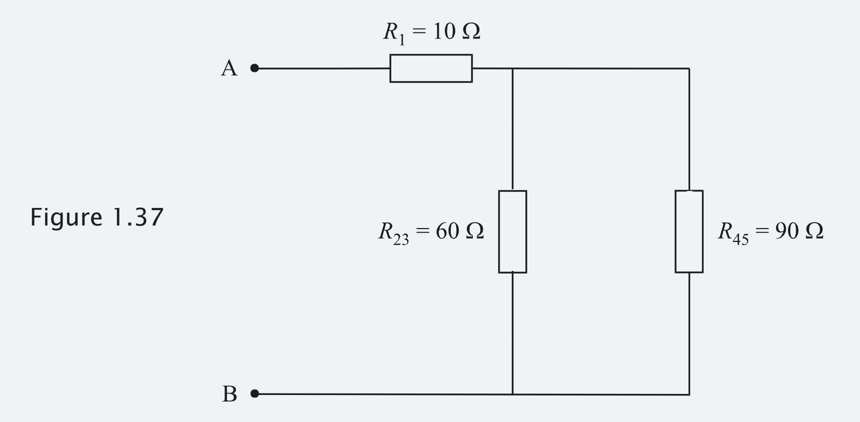


Figure 1.37

R_{23} et R_{45} sont en parallèle et forment donc une résistance équivalente r telle que :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{45}}. \quad \text{Soit :} \quad r = \frac{R_{23}R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = \frac{60 \times 90}{60 + 90} = 36\,\Omega$$

Cette résistance r est finalement en série avec la résistance R_1 (figure 1.38). La résistance équivalente R_{eq} du dipôle AB est donc égale à :

$$R_{eq} = r + R_1 = 36 + 10 = 46\,\Omega$$

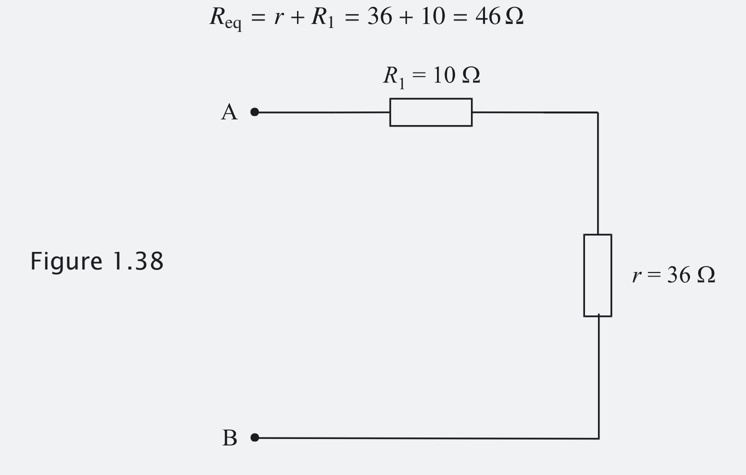


Figure 1.38

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Pour éviter de se perdre dans les calculs, on n'hésitera pas à avoir recours, si besoin est, à des variables intermédiaires (R_{23}, R_{45}) aux dénominations relativement « évidentes ».

5. Les capacités C_2 et C_3 étant en parallèle, elles forment un dipôle de capacité équivalente C_{23} telle que :

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 22 \times 10^{-6} + 10 \times 10^{-6} = 32\,\mu\text{F}$$

De même, les condensateurs C_5 et C_6 sont équivalents à un condensateur unique de capacité C_{56}.

$$C_{56} = C_5 + C_6 = 10 \times 10^{-6} + 8 \times 10^{-6} = 18\,\mu\text{F}$$

Le dipôle AB est donc équivalent à l'association en série des quatre capacités C_1, C_{23}, C_4 et C_{56} (figure 1.39).

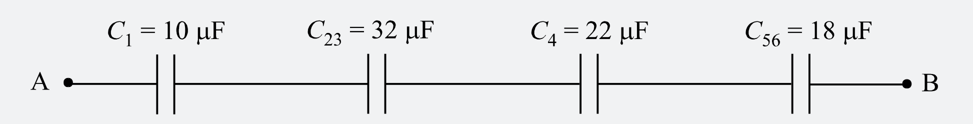


Figure 1.39

La capacité équivalente C_{eq} du dipôle AB est donc telle que :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{56}}$$

Application numérique :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10 \times 10^{-6}} + \frac{1}{32 \times 10^{-6}} + \frac{1}{22 \times 10^{-6}} + \frac{1}{18 \times 10^{-6}} = 2{,}32 \times 10^5$$

$$C_{eq} = 4{,}3 \times 10^{-6}\ \text{F} = 4{,}3\,\mu\text{F}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On calcule la capacité équivalente d'un ensemble de condensateurs aussi facilement qu'une résistance équivalente. On veillera à bien respecter les règles de calcul qui sont inverses de celles utilisées pour les résistances : les capacités s'ajoutent lorsqu'elles sont en parallèle et ce sont leurs inverses qui s'ajoutent lorsqu'elles sont en série.

6. Le générateur E impose sa tension aux bornes du dipôle AB. En appliquant la convention récepteur aux bornes de R, et en tenant compte du sens de la tension U, on peut placer sur le schéma les flèches symbolisant les différences de potentiel (figure 1.40).

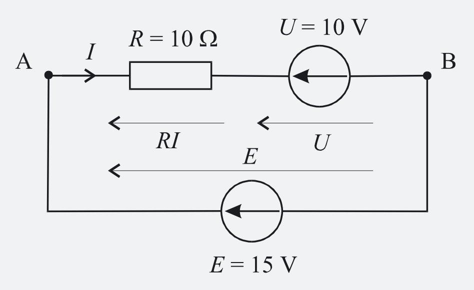


Figure 1.40

Il suffit de lire le schéma en considérant que la tension E est bien la somme des deux tensions RI et U : $E = U + RI$

Soit, puisque l'on cherche le courant I :

$$I = \frac{E - U}{R} = \frac{15 - 10}{10} = 0{,}5 \text{ A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Les fautes de signes constituent une des principales sources d'erreur dans un problème d'électrocinétique. Pour éliminer tout risque, il suffit de respecter la convention récepteur pour les dipôles passifs et de diriger les flèches des générateurs de tension vers le potentiel le plus élevé. On peut aussi diriger ces flèches en sens inverse en comptant les tensions négativement.

7. Étudions successivement les deux cas proposés.

• **Cas de la figure 1.17 (a)**

Plaçons les différentes flèches symbolisant les tensions en respectant les conventions (figure 1.41).

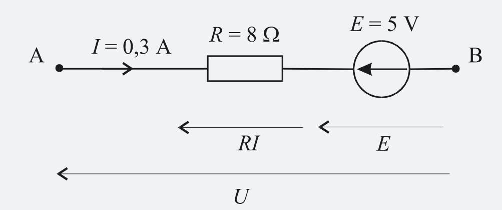


Figure 1.41

On écrit immédiatement :

$$U = RI + E$$

Soit : $$U = (8 \times 0{,}3) + 5 = 7{,}4 \text{ V}$$

• **Cas de la figure 1.17 (b)**

Plaçons les flèches symbolisant les tensions en prenant soin d'orienter convenablement la différence de potentiels E. La figure 1.42 montre les deux manières de positionner cette tension.

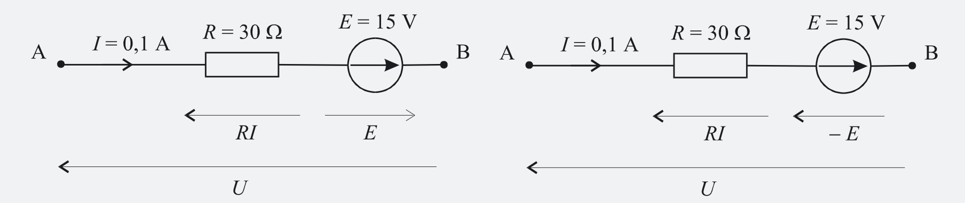


Figure 1.42

On lit immédiatement :

$$U = RI - E$$

Soit : $$U = (30 \times 0{,}1) - 15 = -12 \text{ V}$$

La valeur négative représente une tension qui est effectivement positive dans le sens opposé à celui suggéré par l'énoncé.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il vaut mieux passer un peu de temps à vérifier que l'on place correctement les sens des courants et ceux des différences de potentiels plutôt que de risquer une erreur de calcul. En respectant toujours les conventions récepteur ou générateur, on élimine quasiment tout risque.

8. Étudions successivement les deux cas proposés.

• **Cas de la figure 1.18 (a)**

Plaçons les différentes flèches symbolisant les tensions en respectant les conventions (figure 1.43).

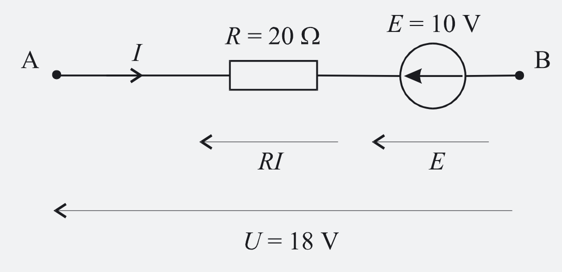


Figure 1.43

On écrit immédiatement :

$$U = RI + E$$

Soit :
$$I = \frac{U - E}{R} = \frac{18 - 10}{20} = 0{,}4\,\text{A}$$

• **Cas de la figure 1.18 (b)**

Après avoir placé les tensions en respectant les conventions (figure 1.44), on lit :

$$U = E - RI$$

On tire immédiatement de cette équation la valeur du courant I recherché :

$$I = \frac{E - U}{R} = \frac{3 - 5}{30} = -0{,}067\,\text{A} = -67\,\text{mA}$$

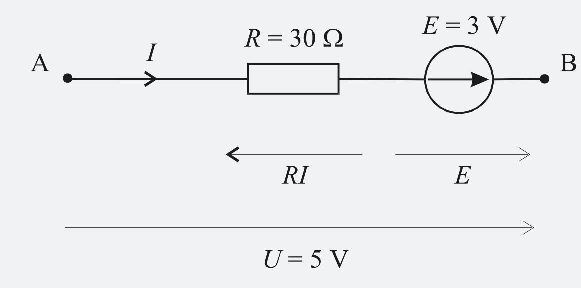


Figure 1.44

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La valeur négative trouvée indique simplement que le courant circule en réalité positivement dans le sens opposé à celui proposé sur le schéma. On pourrait éventuellement le placer dans l'autre sens (figure 1.45) en considérant que sa valeur est positive. Il convient de bien insister sur le fait que le sens du courant importe peu, celui-ci étant considéré systématiquement comme une valeur algébrique.

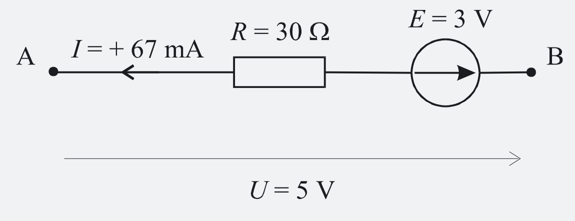


Figure 1.45

9. Étudions successivement les deux cas proposés.

• **Cas de la figure 1.19 (a)**

Plaçons les différences de potentiel comme indiqué sur la figure 1.46.

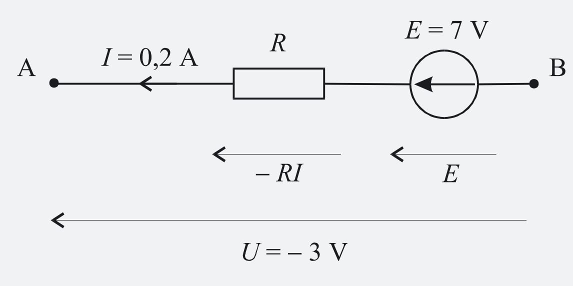


Figure 1.46

Nous prenons soin de considérer comme négative la tension aux bornes de R et nous pouvons écrire immédiatement :

$$U = E - RI$$

Soit :

$$R = \frac{E - U}{I} = \frac{7 + 3}{0,2} = 50\,\Omega$$

• **Cas de la figure 1.19 (b)**

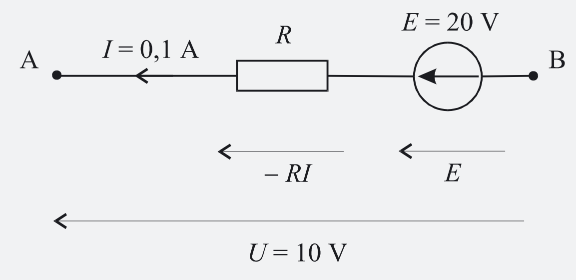


Figure 1.47

Comme pour le cas précédent, on lit immédiatement sur la figure 1.47 :

$$U = E - RI$$

Soit :

$$R = \frac{E - U}{I} = \frac{20 - 10}{0,1} = 100\,\Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice, comme les précédents, ne pose pas de réelle difficulté. Au risque de nous répéter, il faut toutefois veiller à bien respecter les conventions de signes et d'orientation des divers courants et tensions. La plupart des erreurs commises dans les problèmes d'électrocinétique viennent de fautes de signes dues souvent à une mauvaise compréhension de l'importance de ces conventions. Le lecteur veillera également à ne pas se précipiter et à vérifier plutôt deux fois qu'une, la bonne orientation de ces paramètres électriques. Il s'apercevra rapidement qu'il s'agit d'un point de départ extrêmement important qui

d'une part conditionne l'ensemble des calculs ultérieurs et qui d'autre part constitue une certaine garantie de succès dans la résolution de tous les problèmes susceptibles d'être rencontrés.

10. On place les différentes tensions dans le circuit (figure 1.48) en prenant soin de respecter la convention générateur pour les résistances et de placer la tension U en tenant compte du sens dans lequel est placé ce générateur. Il peut être plus commode de placer la tension $(-U)$.

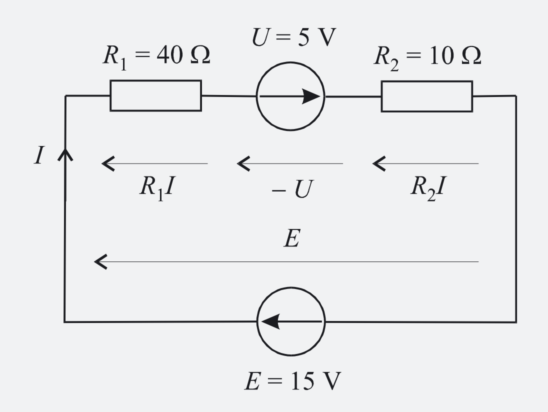


Figure 1.48

Sur le schéma, on lit :

$$E = R_1 I - U + R_2 I$$

D'où :

$$I = \frac{E + U}{R_1 + R_2} = \frac{15 + 5}{10 + 40} = 0{,}4 \text{ A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice a une fois de plus vocation à entraîner le lecteur à maîtriser le positionnement des paramètres électriques dans un circuit. On remarquera ici l'orientation de la tension $(-U)$ en sens contraire de la flèche du générateur parce que comptée négativement.

11. Appelons I le courant qui parcourt le circuit et plaçons les tensions aux bornes des deux résistances R_1 et R_2 en respectant la convention récepteur (figure 1.49).

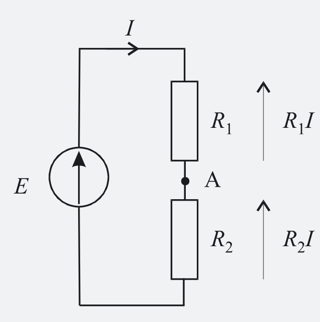


Figure 1.49

Le potentiel au point A n'est rien d'autre que la tension $R_2 I$ puisque nous considérons comme référence de tension le potentiel de la borne négative du générateur :

$$V_A = R_2 I \qquad (1.6)$$

Comme nous devons exprimer V_A en fonction de E, R_1 et R_2, il nous faut donc éliminer I c'est-à-dire l'exprimer en fonction des paramètres souhaités. Dans le schéma de la figure 1.47, on lit :

$$E = R_1 I + R_2 I$$

D'où : $$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Il vient donc, d'après l'équation (1.6) :

$$V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il est courant et pour tout dire, fort utile, dans un problème d'électrocinétique, de chercher à exprimer des tensions en fonction d'autres tensions, et donc, d'avoir à éliminer les courants dans les expressions algébriques. Par ailleurs, le résultat trouvé dans cet exercice est essentiel et doit être connu. Il s'agit du schéma classique du diviseur de tensions. Il permet de déterminer le potentiel en un point quelconque commun à deux résistances parcourues par le même courant.

Important : le résultat n'est valable que si le même courant parcourt les deux résistances.

12. La tension E est appliquée aux bornes de l'association en série de la résistance R et du générateur de courant I. Comme le courant I est imposé à tout le circuit, on a :

$$E = RI + U$$

Soit : $$U = E - RI$$

Application numérique :

$$U = 10 - 100 \times 50 \times 10^{-3}$$

Soit : $$U = 5\ \text{V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre bien que, contrairement à une idée faussement répandue, la tension aux bornes d'un générateur de courant est en général non nulle et dépend du reste du circuit.

13. La tension E règne aux bornes de l'association en série du générateur de courant I_0 et de la résistance R_1. Cette tension E est donc la somme des deux tensions U d'une part et $(-R_1 I_0)$ d'autre part (figure 1.50).

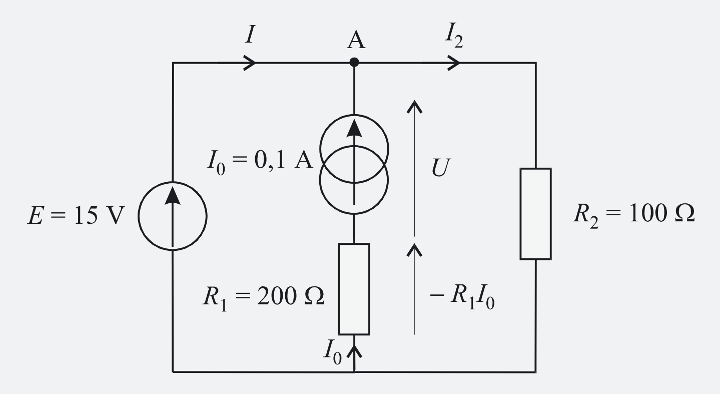


Figure 1.50

On obtient donc immédiatement :

$$E = U - R_1 I_0$$

D'où : $$U = E + R_1 I_0 = 15 + (200 \times 10^{-1}) = 35\ \text{V}$$

La tension E régnant également aux bornes de la résistance R_2, et I_2 étant défini comme indiqué sur la figure 1.50, c'est-à-dire en respectant pour R_2 la convention récepteur, on tire également :

$$E = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{15}{100} = 150\ \text{mA}$$

Appliquons la loi des nœuds au point A (figure 1.50) : la somme des courants dirigés vers le nœud est égale à la somme des courants issus du nœud. Soit :

$$I + I_0 = I_2$$

D'où : $$I = I_2 - I_0 = 150 - 100 = 50\,\text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Lorsqu'une tension est appliquée aux bornes d'un circuit constitué de plusieurs branches en parallèle, il est plus simple et plus rapide de considérer chaque branche indépendamment plutôt que d'écrire la batterie d'équations fournie par les lois de Kirchhoff.

14. Les résistances R_1 et R_3 sont en parallèle et possèdent donc une résistance équivalente de 50 Ω. Il en est de même pour R_2 et R_4.
L'association des quatre résistances se résume donc à la mise en série de deux résistances de 50 Ω.
Cette association possède donc une résistance équivalente :

$$R_{eq} = 100\,\Omega$$

On détermine donc facilement le courant I :

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{20}{100} = 0{,}2\,\text{A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Lorsqu'on recherche une grandeur électrique dans un circuit, que ce soit un courant et une tension, on cherchera toujours à réduire, si possible, les réseaux résistifs complexes s'il y en a.

15. Le sens du courant I suggère que c'est le générateur E_1 qui alimente le reste du circuit, puisque la convention générateur lui est appliquée.
Plaçons les différentes tensions (figure 1.51).

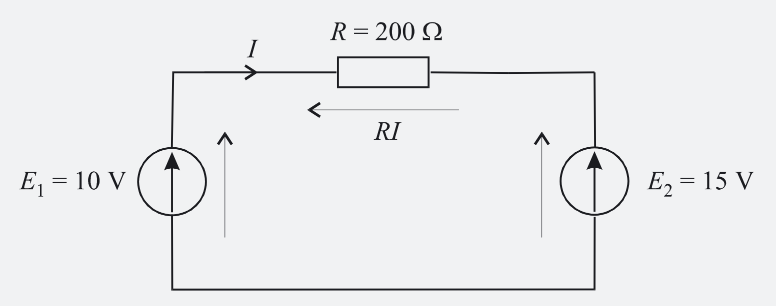


Figure 1.51

Il vient, à la lecture du schéma :

$$E_1 = RI + E_2$$

D'où : $$I = \frac{E_1 - E_2}{R}$$

A.N. : $$I = \frac{10 - 15}{200} = -25\,\text{mA}$$

La valeur négative indique que le courant circule effectivement dans le sens opposé à celui proposé sur le schéma.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre que le sens du courant peut tout à fait être placé arbitrairement avant d'effectuer les calculs. En trouvant une valeur positive, nous aurons bien un courant circulant positivement dans le sens prévu. En trouvant une valeur négative, nous aurons affaire à un courant circulant positivement dans l'autre sens. Cela ne change rien aux calculs.

16. Le générateur de tension E alimente l'association en parallèle de deux dipôles : d'une part la première résistance r et d'autre part le dipôle formé de l'association série du générateur U et de l'autre résistance R.

Il règne donc aux bornes de l'association en série de U et de R une différence de potentiel égale à E.

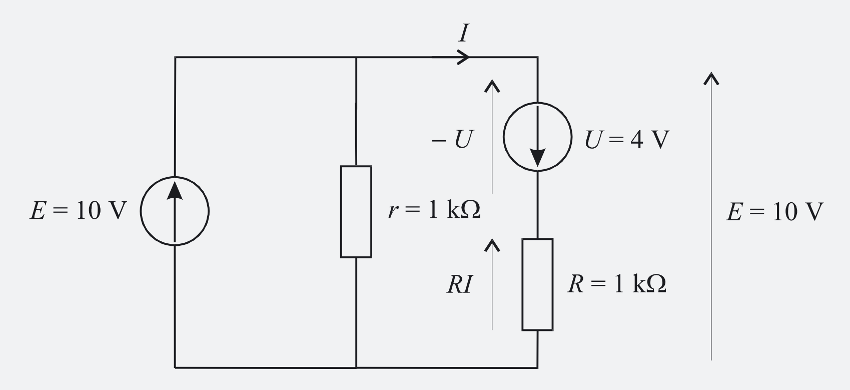


Figure 1.52

Plaçons les différentes flèches symbolisant les tensions dans le circuit (figure 1.52). On tire immédiatement :

$$E = -U + RI$$

D'où :
$$I = \frac{E+U}{R} = \frac{14}{10^3} = 14\,\text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre qu'il est inutile d'invoquer précipitamment les lois de Kirchhoff et qu'il convient de bien observer la conformation du circuit avant de tenter sa résolution. Ici, la branche contenant la résistance r n'a aucune influence sur le courant recherché étant donné que la tension E est imposée à chacune des branches et que l'on cherche le courant dans une seule de ces branches.

17. Tout à fait à droite du circuit, nous reconnaissons l'association en série de deux résistances R et d'une résistance r. Soit R_1 la résistance équivalente à cette association. Notre circuit est donc équivalent à celui représenté sur la figure 1.53.

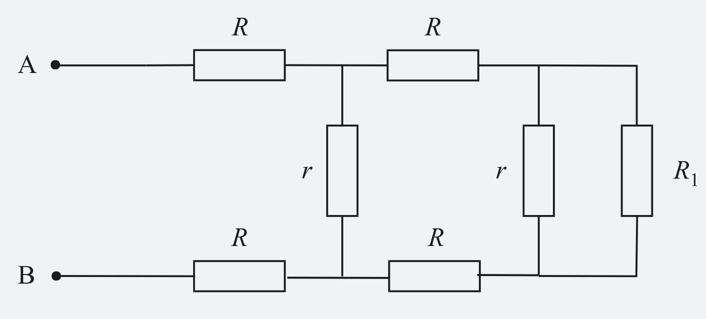


Figure 1.53

Avec :
$$R_1 = 2R + r \tag{1.7}$$

Cette résistance R_1 se trouve en parallèle avec une résistance r. Elles forment une résistance équivalente R_2 telle que :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2R+r} \tag{1.8}$$

Soit :
$$R_2 = \frac{r(2R+r)}{2R+2r} \tag{1.9}$$

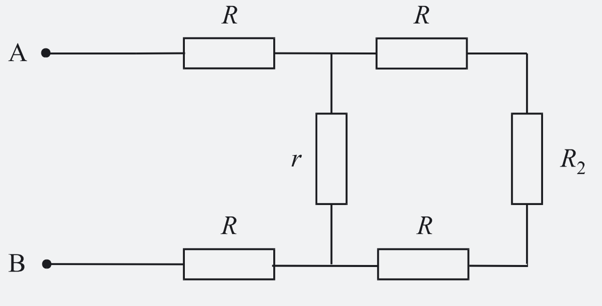


Figure 1.54

Cette résistance R_2 se trouve en série avec deux résistances R comme indiqué sur la figure 1.54. Comme lors de l'étape précédente, nous allons appeler R_3 l'association parallèle de r d'une part et de $2R + R_2$ d'autre part. On obtient :

$$R_3 = \frac{r(2R + R_2)}{2R + r + R_2} \tag{1.10}$$

En remplaçant R_2 par sa valeur obtenue dans l'équation (1.9) :

$$R_3 = \frac{r\left(2R + \dfrac{r(2R + r)}{2(R + r)}\right)}{2R + r + \dfrac{r(2R + r)}{2(R + r)}} = \frac{r(4R^2 + 6Rr + r^2)}{4R^2 + 8Rr + 3r^2} \tag{1.11}$$

Le schéma devient (Fig. 1.55) :

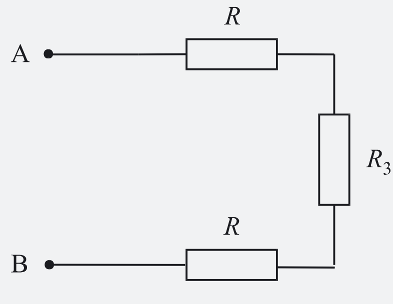


Figure 1.55

Avec, de manière immédiate :

$$R_{eq} = 2R + R_3 \tag{1.12}$$

D'où :

$$R_{eq} = 2R + \frac{r(4R^2 + 6Rr + r^2)}{4R^2 + 8Rr + 3r^2} \tag{1.13}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il est très fréquent dans un problème d'électrocinétique, d'avoir à introduire et à nommer des paramètres ou des grandeurs dont il n'est pas question dans l'énoncé. Ici, R_1, R_2 et R_3 ont été introduites pour des raisons de commodité. On veillera systématiquement à introduire des dénominations logiques et cohérentes de manière à ne pas surcharger les écritures et de manière à s'y retrouver facilement. Ne pas hésiter, pour finir, à effectuer avec soin les schémas équivalents intermédiaires qui prennent certes un peu de temps mais qui sont autant d'étapes importantes pour parvenir à un résultat juste.

18. Traçons le schéma du circuit électrique proposé (figure 1.56). Soit I le courant qui circule dans le circuit, orienté de manière à respecter la convention générateur pour E. Plaçons les tensions aux bornes des deux résistances. Nous remarquons que la flèche aux bornes de r, telle que nous l'avons placée, est dirigée dans le même sens que le courant.

La flèche de la tension représente donc $-rI$.

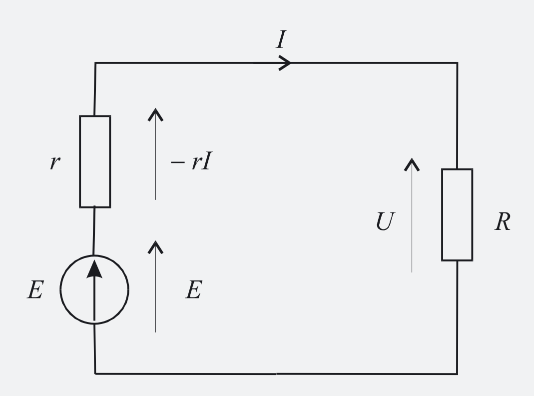


Figure 1.56

À la lecture du schéma, il vient :

$$U = E - rI \tag{1.14}$$

Comme nous souhaitons exprimer U en fonction de r, R et E, nous devons éliminer le courant de cette équation. Il suffit d'écrire :

$$U = RI \tag{1.15}$$

$$I = \frac{U}{R} \tag{1.16}$$

que l'on remplace dans l'équation (1.14) pour obtenir :

$$U = E - r\frac{U}{R} \tag{1.17}$$

D'où :

$$U\left(1 + \frac{r}{R}\right) = E$$

$$U = E\frac{R}{R + r}$$

Traçons alors les variations de U en fonction de R.

La dérivée de U par rapport à R montre que la fonction $U(R)$ est croissante :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} = E\frac{(R + r) - R}{(R + r)^2} = E\frac{r}{(R + r)^2} > 0 \tag{1.18}$$

De plus :

$$\lim_{R \to 0} U = 0$$

$$\lim_{R \to +\infty} U = E$$

On notera par ailleurs dans l'expression (1.18) que la dérivée est décroissante, ce qui se traduit par une courbe dont la concavité sera orientée vers le bas. Ce qui donne sommairement le tracé de la figure 1.57.

Il est intéressant de noter que :

$$R = r \Leftrightarrow U = \frac{E}{2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans un problème d'électrocinétique, il est fondamental de traduire immédiatement l'énoncé par un schéma électrique. Par ailleurs, cet exercice montre

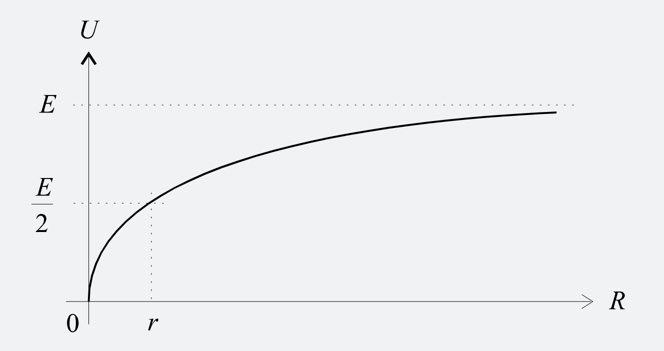


Figure 1.57

que la tension aux bornes d'un générateur de tension réel dépend de la résistance du circuit qu'il alimente et diminue d'autant plus que cette résistance est faible, donc que le courant tiré du générateur est important.

19. La figure 1.58 représente le circuit. Comme cela a été démontré pour l'exercice 1.18, on a :

$$U = E\frac{R}{R+r}$$

On forme donc à l'aide de cette expression et des deux couples de valeurs donnés dans l'énoncé, les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 6 = E\dfrac{3}{3+r} \\ 8 = E\dfrac{8}{8+r} \end{cases}$$

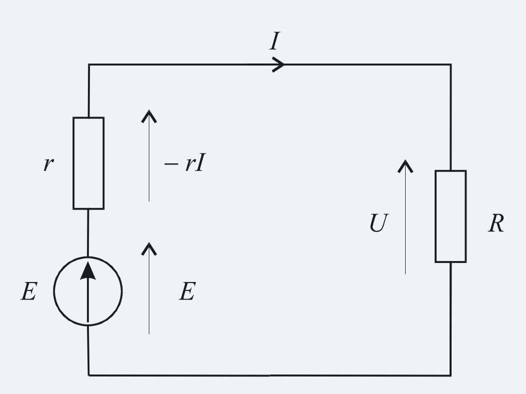


Figure 1.58

Soit encore en réorganisant ces équations :

$$\begin{cases} (3+r)\times 6 = E\times 3 \\ (8+r)\times 8 = E\times 8 \end{cases}$$

Multiplions par 8 la première équation et par 3 la seconde et effectuons la différence. Il vient :

$$8\times(3+r)\times 6 - 3\times(8+r)\times 8 = 0$$

D'où : $$-48 + 24r = 0$$

Soit : $$r = 2\Omega$$

En remplaçant r par sa valeur dans l'une des deux équations du système ci-dessus, par exemple la première, on tire :

$$(3 + 2) \times 6 = E \times 3$$

D'où : $$E = 10\,\text{V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Une fois de plus, il est fondamental de traduire l'énoncé par un schéma exploitable. Cet exercice montre comment on peut mesurer les caractéristiques d'une source de tension réelle au moyen de deux points de mesures.

20. Exprimons la loi d'Ohm aux bornes des résistances. La tension E règne aux bornes de R_1. On a donc :

$$E = R_1 I_1$$

Elle règne aussi aux bornes de l'association en série $R_2 + R_3$. Donc :

$$E = (R_2 + R_3)I_2$$

Soit : $$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{40} = 250\,\text{mA}$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{10}{100 + 60} = 62{,}5\,\text{mA}$$

En appliquant la loi des nœuds, on a :

$$I_0 = I_1 + I_2 = 312{,}5\,\text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre qu'il convient de raisonner sur la globalité du schéma avant d'écrire quelque équation que ce soit. En remarquant que les courants I_1 et I_2 se déterminent facilement, on invoque uniquement la loi des nœuds au moment où on en a besoin.

21. Plaçons les courants dans les différentes branches, puis les tensions aux bornes de chaque résistance en respectant la convention récepteur comme indiqué sur la figure 1.59. Appelons V_1, V_2, V_3 et V_4 les quatre tensions que nous recherchons.

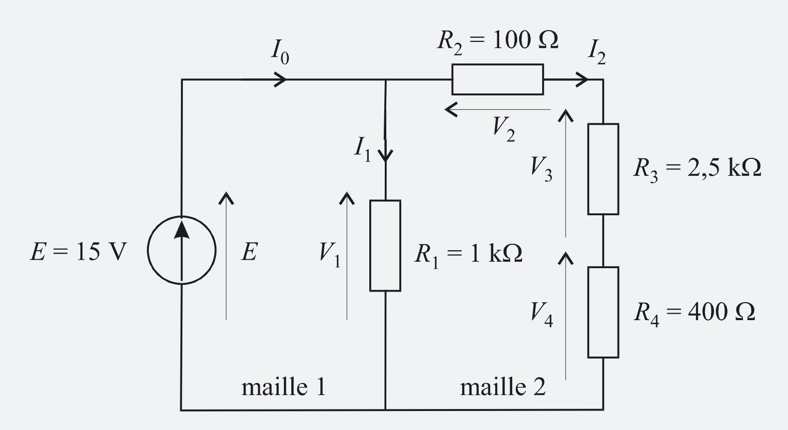


Figure 1.59

$$V_1 = R_1 I_1 V_2 = R_2 I_2 V_3 = R_3 I_2 V_4 = R_4 I_2$$

Écrivons la loi des mailles dans les deux mailles du circuit.

Dans la maille 1, il vient :

$$E - R_1 I_1 = 0$$

Dans la maille 2, on a :

$$R_1I_1 - R_2I_2 - R_3I_2 - R_4I_2 = 0$$

La première équation nous donne immédiatement :

$$V_1 = R_1I_1 = E = 15\,\text{V}$$

que nous remplaçons dans la seconde équation :

$$(R_2 + R_3 + R_4)I_2 = E$$

D'où : $$I_2 = \frac{E}{R_2 + R_3 + R_4}$$

On peut alors calculer immédiatement les trois autres tensions inconnues :

$$\text{V}_2 = R_2I_2 = E\frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = 0{,}5\,\text{V}$$
$$\text{V}_3 = R_3I_2 = E\frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 12{,}5\,\text{V}$$
$$\text{V}_4 = R_4I_2 = E\frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 2\,\text{V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Afin d'éviter de multiplier les inconnues et de se perdre dans un dédale de multiples équations, on veillera à introduire immédiatement la loi d'Ohm pour exprimer les tensions aux bornes des résistances plutôt que d'introduire des variables supplémentaires.

22. Commençons par calculer le courant le plus évident à déterminer : I_1. Aux bornes de la résistance R_1 règne la tension E. On a donc : $$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{30}{20} = 1{,}5\,\text{A}$$

Un bref coup d'œil sur le schéma montre qu'en connaissant le potentiel au point C, il sera très facile de déterminer les autres courants puisque le point B se trouve au potentiel E et que le point A se trouve à la masse puisqu'il correspond à la borne de référence du générateur. Nous cherchons donc des équations permettant de déterminer V_C : la loi d'Ohm nous donne trois équations :

$$E - V_C = R_3I_3 \qquad (1.19)$$
$$E - V_C = (R_4 + R_5)I_3 \qquad (1.20)$$
$$V_C = R_2I_2 \qquad (1.21)$$

De plus la loi des nœuds prévoit que :

$$I_2 = I_3 + I_4 \qquad (1.22)$$

Nous disposons bien de quatre équations à quatre inconnues. Le plus simple consiste à exprimer tous les courants en fonction de V_C à l'aide des équations (1.19), (1.20) et (1.21), puis à les remplacer dans l'équation (1.22).

On obtient ainsi :

$$I_3 = \frac{E - V_C}{R_3} \qquad (1.23)$$
$$I_4 = \frac{E - V_C}{R_4 + R_5} \qquad (1.24)$$
$$I_2 = \frac{V_C}{R_2} \qquad (1.25)$$

L'équation (1.22) devient alors :

$$\frac{V_C}{R_2} = \frac{E - V_C}{R_3} + \frac{E - V_C}{R_4 + R_5}$$

Soit : $$V_C \times \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}\right) = E \times \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}\right)$$

D'où : $$V_C = E \times \frac{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4 + R_5}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4 + R_5}}$$

Application numérique : $V_C = 23\ \text{V}$

Les équations (1.23), (1.24) et (1.25) nous donnent les valeurs des courants I_2, I_3 et I_4.

$$I_2 = 0{,}23\ \text{A} \qquad I_3 = 0{,}115\ \text{A} \qquad I_4 = 0{,}115\ \text{A}$$

En appliquant la loi des nœuds au point B, on obtient :

$$I_X = I_3 + I_4 = 0{,}23\ \text{A}$$

Puis, de manière tout aussi évidente :

$$I_0 = I_1 + I_X = 1{,}5 + 0{,}23 = 1{,}73\ \text{A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La détermination d'un potentiel ń stratégique ż permet souvent de débloquer la situation en présence de nombreuses équations.

23. Plaçons les courants dans les différentes branches du circuit, puis en respectant la convention récepteur, les tensions aux bornes de chaque résistance (figure 1.60).

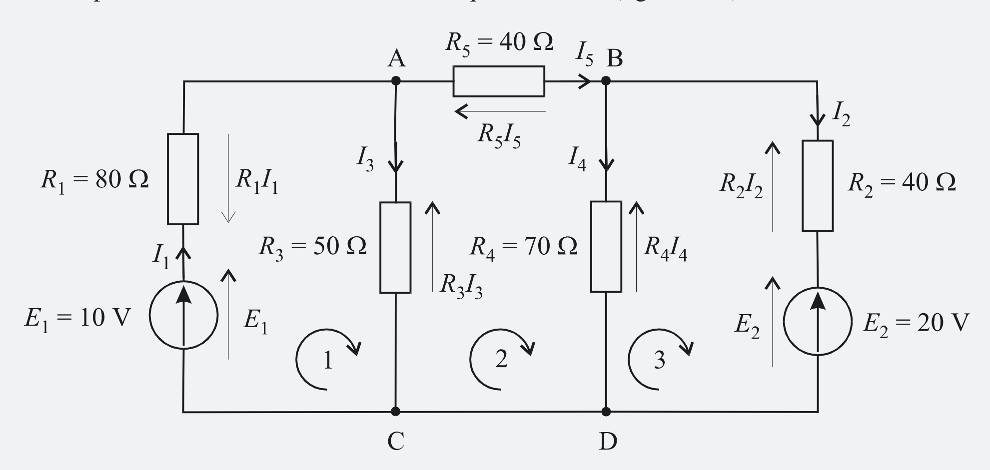


Figure 1.60

Sur le schéma de la figure 1.60, les tensions aux bornes de chaque résistance ont déjà été remplacées par leur expression en fonction du courant qui les traverse, et ce, en utilisant la loi d'Ohm. Notre dispositif comporte donc 5 inconnues : I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5.

Cinq équations suffiront donc pour déterminer ces cinq courants, et notamment le courant I_5 que nous recherchons. Comme le circuit comporte trois mailles indépendantes, la deuxième loi de Kirchhoff nous fournira trois équations. Les deux autres équations seront données par la loi des nœuds, exprimée aux points A et B (son application en C et D donnerait les mêmes équations).

Ainsi, la loi des mailles dans la maille 1 du circuit nous donne :

$$E_1 - R_1I_1 - R_3I_3 = 0 \tag{1.26}$$

On choisit un sens de parcours de la maille, de manière tout à fait arbitraire, et on veille, comme toujours, à compter positivement les différences de potentiel qui sont orientées dans le sens du parcours, et à compter négativement celles qui sont dirigées en sens contraire. Attention : les erreurs de signes sont fréquentes.

Dans les mailles 2 et 3, on obtient respectivement :

$$R_3I_3 - R_5I_5 - R_4I_4 = 0 \quad (1.27)$$

$$R_4I_4 - R_2I_2 - E_2 = 0 \quad (1.28)$$

La loi des nœuds appliquée respectivement en A et B nous donne :

$$I_1 - I_3 = I_5 \quad (1.29)$$

$$I_2 + I_4 = I_5 \quad (1.30)$$

Comme la seule valeur recherchée est celle de I_5, nous allons tenter d'éliminer successivement les autres courants.

Dans l'équation 1.28, exprimons I_2 :

$$I_2 = \frac{R_4I_4 - E_2}{R_2}$$

Remplaçons I_2 par cette expression dans l'équation 1.30 :

$$\frac{R_4I_4 - E_2}{R_2} + I_4 = I_5$$

Soit : $$I_4\left(1 + \frac{R_4}{R_2}\right) = I_5 + \frac{E_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad I_4 = \frac{R_2}{R_2 + R_4}\left(I_5 + \frac{E_2}{R_2}\right) \quad (1.31)$$

De la même manière, exprimons I_1 à partir de l'équation 1.26 :

$$I_1 = \frac{E_1 - R_3I_3}{R_1}$$

que nous remplaçons dans l'équation 1.29 :

$$\frac{E_1 - R_3I_3}{R_1} - I_3 = I_5$$

Regroupons les termes en I_3 :

$$I_3\left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) = -I_5 + \frac{E_1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_3}\left(\frac{E_1}{R_1} - I_5\right) \quad (1.32)$$

Remplaçons pour finir les expressions de I_4 et I_3 trouvées respectivement en 1.31 et 1.32, dans l'équation 1.27, de manière à ne laisser subsister que l'unique inconnue I_5 :

$$\frac{R_3R_1}{R_1 + R_3}\left(\frac{E_1}{R_1} - I_5\right) - R_5I_5 - \frac{R_4R_2}{R_2 + R_4}\left(I_5 + \frac{E_2}{R_2}\right) = 0$$

$$I_5\left(\frac{R_3R_1}{R_1 + R_3} + R_5 + \frac{R_4R_2}{R_2 + R_4}\right) = \frac{R_3R_1}{R_1 + R_3}\frac{E_1}{R_1} - \frac{R_4R_2}{R_2 + R_4}\frac{E_2}{R_2}$$

$$I_5 = \frac{\dfrac{R_3E_1}{R_1 + R_3} - \dfrac{R_4E_2}{R_2 + R_4}}{\dfrac{R_3R_1}{R_1 + R_3} + R_5 + \dfrac{R_4R_2}{R_2 + R_4}}$$

A.N. : $$I_5 = \frac{\dfrac{50 \times 10}{80+50} - \dfrac{70 \times 20}{40+70}}{\dfrac{80 \times 50}{80+50} + 40 + \dfrac{40 \times 70}{40+70}} = -92\,\text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il est en général hors de question de tenter de résoudre un tel problème en utilisant une méthode systématique basée sur des techniques d'algèbre linéaire. Dans des circuits quelque peu compliqués, on a rapidement affaire à de nombreuses inconnues qu'on cherchera à éliminer successivement. Nous étudierons dans le prochain chapitre des techniques plus efficaces permettant de calculer rapidement des courants ou des tensions dans n'importe quel circuit électrique. Les lois de Kirchhoff ne constituent pas l'unique ressource de l'arsenal des techniques de mise en équations des problèmes d'électricité. Elles sont souvent génératrices de systèmes d'équations complexes et on leur préfère des méthodes basées sur des théorèmes plus ń directs ż.

24. Pour que I soit nul, il faut et il suffit que :

$$V_A = V_B$$

a. Comme le courant I est supposé être nul, les résistances R_1 et R_2 sont parcourues par le même courant. On peut donc appliquer le principe du diviseur de tension au point A (exercice 1.11) et on obtient immédiatement l'expression de V_A :

$$V_A = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

b. De la même manière, les résistances R_3 et R_4 sont parcourues par le même courant. On peut donc aussi appliquer le principe du diviseur de tension au point B pour obtenir l'expression de V_B :

$$V_B = E\frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

c. Comme $I = 0$, il n'y a aucune différence de potentiels aux bornes de R_5. On a donc $V_A = V_B$, qui se traduit donc par la condition suivante :

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad \Leftrightarrow \quad R_2R_3 = R_1R_4$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il s'agit ici du classique pont de Wheatstone. La relation qui lie les quatre résistances correspond à l'équilibre du pont, état dans lequel le courant I est nul. On notera également l'intérêt de connaître le principe du pont diviseur de tension qui conduit très rapidement à la résolution de ce problème.

25. **a.** Nous ne pouvons pas directement appliquer le principe du diviseur de tension au point A, compte tenu du fait qu'une dérivation est issue de ce point et que des courants différents circulent donc dans R_2 et R_3.

En revanche, transformons légèrement le dessin (sans changer le circuit) comme indiqué sur la figure 1.61.

Les deux résistances r et R_1 sont en série et forment une résistance équivalente de 25 Ω. Soit R_4 cette résistance équivalente. Les deux résistances R_3 et R_2 sont en parallèle. Soit R_5 leur résistance équivalente qui est égale à 8 Ω. Sur le schéma ainsi réduit de la figure 1.52, on peut appliquer le principe du diviseur de tension :

$$V_A = E\frac{R_5}{R_4 + R_5}$$

Application numérique : $V_A = 4{,}85\,\text{V}$

b. En appliquant la loi d'Ohm aux résistances R_2 et R_3, on obtient immédiatement :

$$I_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{4{,}85}{40} = 121\,\text{mA} \qquad I_3 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{4{,}85}{10} = 485\,\text{mA}$$

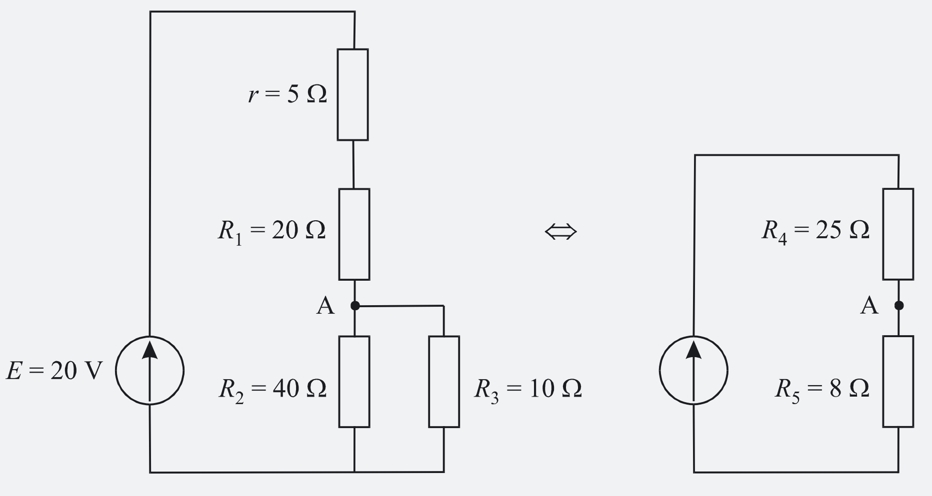


Figure 1.61

Le courant I_1 s'obtient en considérant qu'aux bornes de l'association série ($R_4 = r + R_1$) règne une différence de potentiel égale à $E - V_A$:

$$I_1 = \frac{E - V_A}{r + R_1} = \frac{20 - 4{,}85}{25} = 606\,\text{mA}$$

c. On vérifie alors facilement la loi des nœuds :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On retiendra bien sûr une raison supplémentaire de bien connaître le principe du diviseur de tension. De plus, on notera que dans les circuits quelque peu complexes, il est toujours intéressant d'ń arranger ż le schéma de manière à tirer parti d'associations très simples qui ne paraissent pas évidentes de prime abord. Pour finir, lorsque l'on cherche des courants, il est toujours utile de déterminer préalablement un ou plusieurs potentiels qui donnent ensuite accès très rapidement à toutes les grandeurs recherchées.

26. **a.** Nommons et orientons les différents courants dans les diverses branches du circuit (figure 1.62).

Le courant I_1 est placé de manière à respecter la convention générateur pour E. Le sens du courant I_0 est imposé par le générateur de courant. On fera l'économie d'une variable en plaçant directement un courant I_0+I_1 dans la branche contenant R_3, c'est-à-dire en exprimant immédiatement la loi des nœuds au point A.

Positionnons également les différentes flèches symbolisant les diverses tensions. On n'oubliera pas la tension E_0 qui apparaît aux bornes du générateur de courant. Les tensions aux bornes des résistances seront orientées en respectant la convention récepteur.

b. Comme il s'agit de déterminer les tensions aux bornes de chaque résistance, nous allons chercher à écrire des équations permettant de déterminer les tensions E_1, E_2, E_3 et E_4.

La deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles) nous permet d'écrire deux équations, puisque le circuit est composé de deux mailles indépendantes :

$$E_3 - E_0 + E_4 = 0 \qquad (1.33)$$

$$E - E_1 - E_3 - E_2 = 0 \qquad (1.34)$$

c. Écrivons la loi d'Ohm aux bornes de chaque résistance :

$$E_1 = R_1 I_1 \qquad (1.35)$$

$$E_2 = R_2 I_1 \qquad (1.36)$$

$$E_3 = R_3(I_1 + I_0) \qquad (1.37)$$

$$E_4 = R_4 I_0 \qquad (1.38)$$

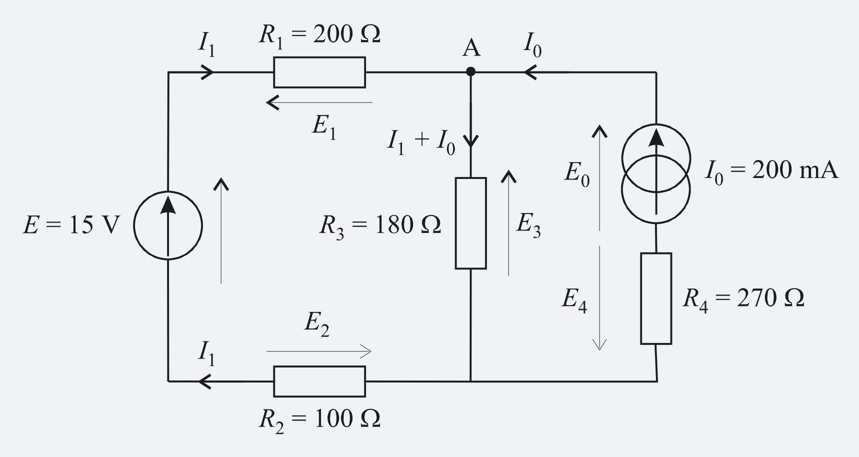


Figure 1.62

L'équation 1.38 nous donne immédiatement une des quatre tensions recherchées puisque I_0 est connu :

$$E_4 = R_4 I_0 = 270 \times 0{,}2 = 54\ \text{V}$$

d. Les équations 1.35 à 1.37 permettront de déterminer les trois autres tensions recherchées à condition de connaître la valeur de I_1. Calculons donc I_1. Pour ce faire, remplaçons les expressions de E_1, E_2, E_3 dans l'équation 1.34. Il vient alors :

$$E - R_1 I_1 - R_3(I_1 + I_0) - R_2 I_1 = 0$$

D'où :

$$R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_0) + R_2 I_1 = E$$

$$(R_1 + R_3 + R_2) I_1 = E - R_3 I_0$$

$$I_1 = \frac{E - R_3 I_0}{R_1 + R_3 + R_2}$$

e. En remplaçant l'expression de I_1 dans les équations 1.35 à 1.37, on obtient :

$$E_1 = R_1 I_1 = \frac{R_1(E - R_3 I_0)}{R_1 + R_3 + R_2}$$

$$E_2 = R_2 I_1 = \frac{R_2(E - R_3 I_0)}{R_1 + R_3 + R_2}$$

$$E_3 = R_3(I_1 + I_0) = R_3\left(\frac{E - R_3 I_0}{R_1 + R_3 + R_2} + I_0\right)$$

Application numérique :

$$I_1 = \frac{15 - 180 \times 0{,}2}{200 + 180 + 100} = -44\ \text{mA}$$

$$E_1 = R_1 I_1 = -200 \times 44 \times 10^{-3} = -8{,}8\ \text{V}$$

$$E_2 = R_2 I_1 = -100 \times 44 \times 10^{-3} = -4{,}4\ \text{V}$$

$$E_3 = R_3(I_1 + I_0) = 180 \times (0{,}2 - 44 \times 10^{-3}) = 28{,}1\ \text{V}$$

f. Nous pouvons à présent calculer sans peine la tension aux bornes du générateur de courant à l'aide de l'équation 1.33.

$$E_3 - E_0 + E_4 = 0 \Rightarrow E_0 = E_3 + E_4$$

D'où :

$$E_0 = 28{,}1 + 54 = 82{,}1\ \text{V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il est intéressant de noter que de nombreuses valeurs trouvées ici sont négatives. Cela signifie que les directions choisies au départ pour ces tensions ne correspondaient pas au sens effectivement positif de ces paramètres (en réalité c'est le courant I_1 qui circule positivement dans le sens opposé à celui que nous avons prévu). Nous insisterons une fois de plus sur le fait que ceci n'a aucune importance puisque les grandeurs électriques sont toujours comptées algébriquement et qu'il est donc normal que nous ayons à choisir les sens des courants de manière plus ou moins arbitraire.

27. a. Nous sommes en présence d'une association en parallèle de quatre dipôles formés chacun d'un générateur de tension parfait et d'une résistance série. La figure 1.63, qui ne change rien au circuit, permet de mieux se rendre compte de la présence d'un nœud A, et du fait que la tension V cherchée n'est rien d'autre que le potentiel de ce point A.

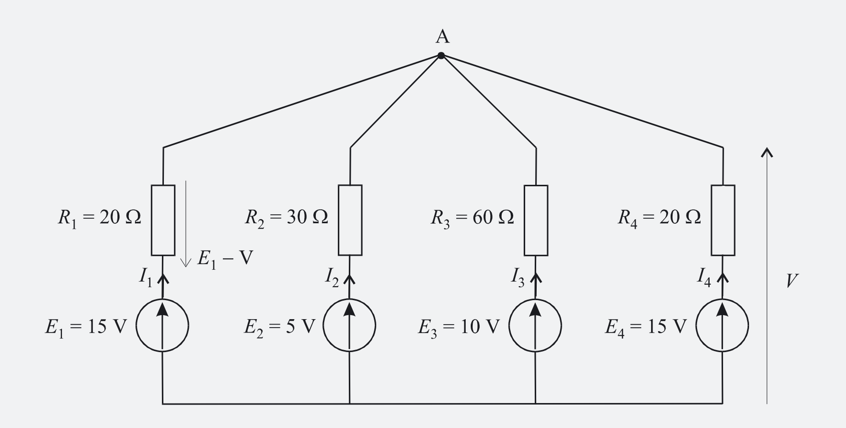


Figure 1.63

b. Appelons I_1, I_2, I_3 et I_4 les courants dans chaque dipôle. La loi des nœuds nous donne immédiatement :

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \qquad (1.39)$$

Chacun des courants peut se déterminer aisément en exprimant la loi d'Ohm aux bornes de chaque résistance. Ainsi, la chute de potentiel aux bornes de R_1 est égale à $E_1 - V$ puisque les tensions E_1 et V sont les potentiels des bornes de R_1 (voir figure 1.63).

On a donc :

$$I_1 = \frac{E_1 - V}{R_1}$$

De même, on a :

$$I_2 = \frac{E_2 - V}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{E_3 - V}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{E_4 - V}{R_4}$$

La loi des nœuds exprimée par l'équation 1.39 nous donne alors :

$$\frac{E_1 - V}{R_1} + \frac{E_2 - V}{R_2} + \frac{E_3 - V}{R_3} + \frac{E_4 - V}{R_4} = 0$$

Soit : $$\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}+\frac{E_4}{R_4}=V\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)$$

D'où : $$V=\frac{\dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}+\dfrac{E_3}{R_3}+\dfrac{E_4}{R_4}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}$$

Application numérique :

$$V=\frac{\dfrac{15}{50}+\dfrac{5}{30}+\dfrac{10}{60}+\dfrac{15}{20}}{\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{20}}=11{,}53\ \text{V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Plusieurs enseignements importants peuvent être tirés de ce problème. Tout d'abord, la technique qui consiste à remplacer, dans une équation tirée de la loi des nœuds, les courants par des expressions dépendant uniquement de tensions, permet très souvent d'atteindre rapidement le but recherché. De plus, cette méthode ne fait appel qu'à la loi d'Ohm et est donc relativement facile à mettre en œuvre. Dans cet exercice, l'existence d'un nœud unique A n'est pas très facile à repérer de prime abord. Il est toujours intéressant de modifier le schéma du circuit (sans changer le circuit, évidemment) pour mettre en évidence certaines particularités qui s'avèrent utiles par la suite.

Théorèmes généraux de l'électricité en régime continu

2

Mots-clés

▪ théorème de Millman ▪ conductance ▪ principe de superposition ▪ théorème de Thévenin ▪ théorème de Norton ▪ équivalence Thévenin Norton ▪ théorème de Kenelly ▪ transformation triangle étoile

Ce deuxième chapitre aborde un certain nombre d'outils sans aucun doute beaucoup plus puissants que les simples lois de Kirchhoff qui, malheureusement, conduisent en général à un grand nombre d'équations et à de nombreuses inconnues. Les théorèmes qui vont à présent être étudiés permettent d'alléger considérablement les calculs fastidieux et donc de limiter les risques d'erreurs. Nous les abordons, pour le moment, dans le cadre du régime continu mais nous verrons au chapitre suivant qu'ils s'appliquent aussi, d'une certaine manière, au régime sinusoïdal.

Théorème de Millman

Le théorème de Millman permet d'exprimer le potentiel en un nœud quelconque d'un réseau en fonction des potentiels aux nœuds voisins. Il est une conséquence de la loi des nœuds et peut donc être utilisé à sa place. L'avantage réside dans le fait qu'on exprime des relations sans courant, uniquement à l'aide de tensions. En utilisant à la fois le théorème de Millman et la loi des mailles, on dispose de deux outils qui permettent de résoudre pratiquement n'importe quel problème d'électrocinétique.

Considérons un nœud quelconque d'un circuit (figure 2.1). Ce nœud est relié à n points du circuit par l'intermédiaire de n branches possédant chacune une résistance R_i. Soient V_i les tensions aux n points voisins du nœud X.

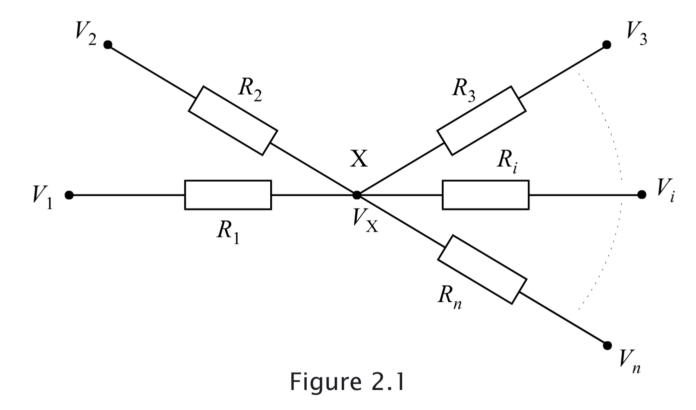


Figure 2.1

Le potentiel V_X s'exprime en fonction des potentiels aux nœuds voisins de la manière suivante :

$$V_X = \frac{\dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_2}{R_2} + \cdots + \dfrac{V_n}{R_n}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_n}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{V_i}{R_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{R_i}}$$

On peut définir également la **conductance** d'un dipôle résistif par l'inverse de sa résistance. Soit :

$$G_i = \frac{1}{R_i} \quad \text{unité : siemens (S)}$$

Ainsi, le théorème de Millman peut aussi s'écrire :

$$V_X = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i}$$

Ce qui revient à dire que le potentiel en un nœud quelconque d'un circuit est la moyenne des potentiels aux nœuds voisins, pondérée par les conductances des différentes branches.

Principe de superposition

Dans un circuit linéaire possédant plusieurs générateurs de tension et à condition que ces sources soient indépendantes, tout potentiel en un point quelconque (ou tout courant dans une branche du circuit) est égal à la somme des potentiels (ou des courants) créés séparément par chaque générateur, les autres générateurs étant éteints, c'est-à-dire court-circuités.

Si le circuit contient des générateurs de tension et des générateurs de courant, le principe reste valable, tant que les sources sont considérées comme indépendantes : on effectue les calculs avec chaque source prise séparément en court-circuitant les autres générateurs de tension et en ouvrant les générateurs de courant (autrement dit en les déconnectant).

Le schéma de la figure 2.2 illustre ce principe :

Trois sources alimentent un circuit dans lequel on recherche la valeur d'un courant I dans une résistance donnée.

On calcule en fait ce courant en considérant d'abord uniquement la source de tension E_A, les autres sources I_B et E_C étant éteintes (générateur de courant remplacé par un circuit ouvert et générateur de tension remplacé par un court-circuit). On trouve alors un courant I_1.

On recommence en calculant le courant I_2 généré par la seule présence de I_B, les deux générateurs de tension étant court-circuités. Enfin, on calcule I_3, courant dû à la seule présence de E_C. En appliquant le principe de superposition, on a immédiatement la valeur du courant I en présence des trois sources :

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Le principe de superposition étant une conséquence directe de la linéarité des composants du circuit, il est tout à fait clair qu'il est généralisable à tout régime de fonctionnement et à tout circuit contenant uniquement des dipôles linéaires. Dès lors qu'un circuit contient des éléments non linéaires, par exemple des diodes, ce principe ne peut plus s'appliquer.

Lorsque les générateurs sont dépendants ou liés, ce qui peut arriver lorsque la modélisation de systèmes complexes conduit à introduire de telles sources, le principe de superposition ne peut s'appliquer car en éteignant une source donnée, on agirait sur une source qui lui serait liée.

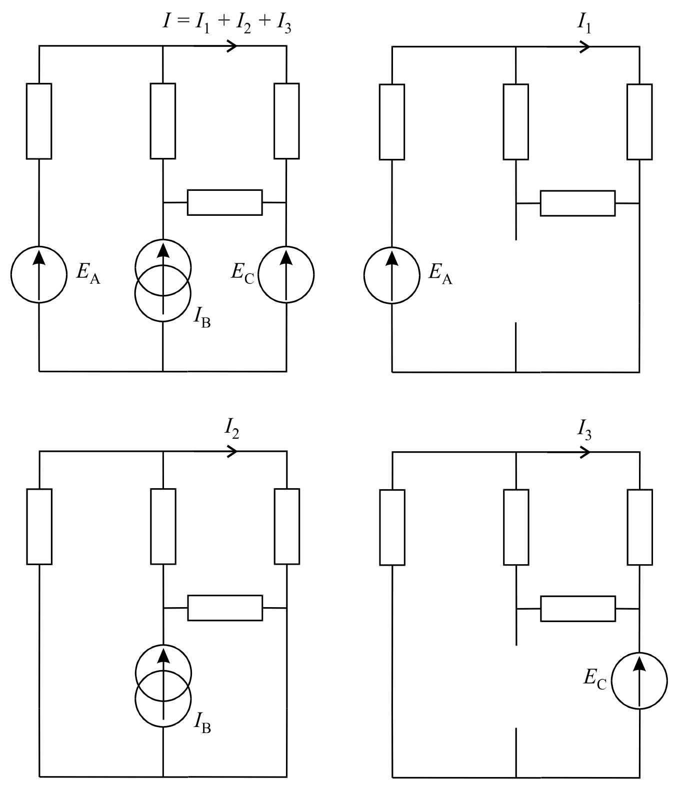


Figure 2.2

Fiche 3

Théorèmes de Thévenin et de Norton

1. Théorème de Thévenin

En régime continu, tout réseau linéaire dipolaire est équivalent à un générateur de tension dit *de Thévenin*, de force électromotrice E_0 et de résistance interne r (figure 2.3).

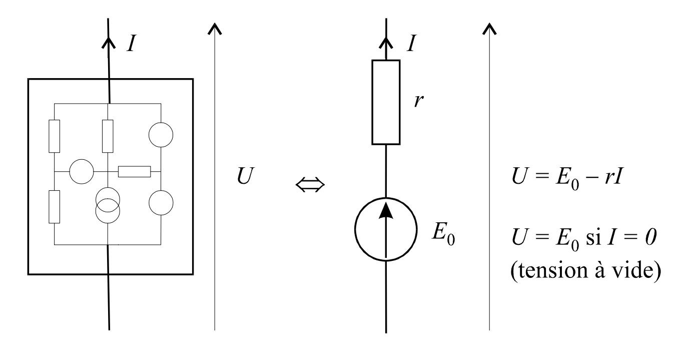


Figure 2.3

La résistance r est égale à la résistance équivalente du réseau lorsque tous ses générateurs sont éteints.

La tension E_0 est égale à la tension à vide du réseau (lorsque $I = 0$ dans le schéma de la figure 2.3).

Notons que puisqu'il s'agit de déterminer un générateur de tension équivalent à un dipôle, nous employons bien évidemment la convention générateur.

2. Théorème de Norton

Le théorème de Norton propose un autre dipôle simple équivalent à tout réseau dipolaire.

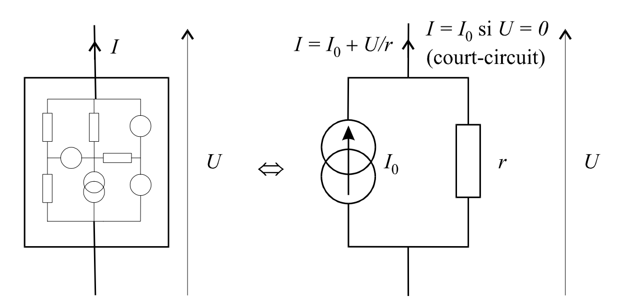


Figure 2.4

En régime continu, tout réseau linéaire dipolaire est équivalent à un générateur de courant dit *de Norton*, de courant I et de résistance interne r (figure 2.4) égale à la résistance interne du générateur de Thévenin.

La résistance r est égale à la résistance équivalente du réseau lorsque tous ses générateurs sont éteints. On utilise volontiers le terme de *conductance interne g* pour qualifier $1/r$.

Le courant I est égal au courant de court-circuit du dipôle (courant circulant dans le dipôle lorsque l'on court-circuite ses deux bornes).

Fiche 4

Équivalence Thévenin - Norton

Un générateur de tension de Thévenin, de force électromotrice E et de résistance interne r est équivalent à un générateur de Norton, de courant $I_0 = \dfrac{E}{R}$ et de même résistance interne r (figure 2.5).

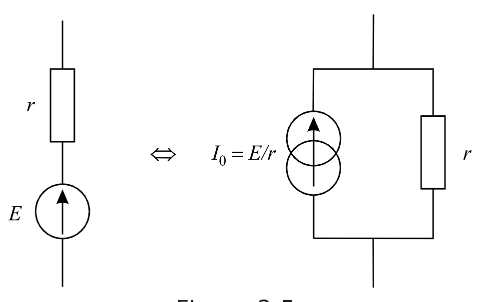


Figure 2.5

Entraînement

QCM

1. Le théorème de Millman est une conséquence directe :

❑ a. de la loi des mailles.

❑ b. de la loi des nœuds.

❑ c. de la loi des mailles et de la loi des nœuds.

❑ d. du principe de superposition.

2. Trois résistances R_1, R_2 et R_3 sont reliées en un point A, leurs autres bornes étant respectivement reliées aux potentiels E, 0 V et 0 V. L'application du théorème de Millman au point A fournit l'égalité :

❑ a. $V_A = \dfrac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}}$

❑ b. $V_A = \dfrac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1}}$

❑ c. $V_A = \dfrac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

❑ d. $V_A = \dfrac{\frac{E}{R_1+R_2+R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

3. L'unité de conductance est :

❑ a. l'ohm.

❑ b. le siemens.

❑ c. l'ohm par volt.

❑ d. le siemens par volt.

4. On souhaite déterminer le potentiel au point A dans le circuit représenté sur la figure ci-dessous. En considérant le principe de superposition, une des quatre propositions suivantes est fausse :

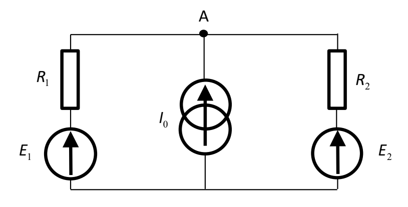


Figure 2.6

❑ a. Le potentiel au point A est égal à la somme de trois potentiels induits par chacune des sources.

❑ b. Le potentiel généré par la source de courant est obtenu en remplaçant les deux sources de tension par un court-circuit.

❑ c. Le potentiel généré par la source de tension E_1 est obtenu en éteignant les deux autres sources.

❑ d. La source de courant est éteinte lorsqu'elle est remplacée par un court-circuit.

5. Le principe de superposition ne s'applique pas si :

❑ a. le circuit comporte des sources de tension ou de courant liées.
❑ b. le circuit ne contient que des éléments linéaires.
❑ c. le circuit ne contient que des sources de courant.
❑ d. le circuit comporte des bobines ou des condensateurs.

6. La résistance équivalente de Thévenin d'un dipôle comportant plusieurs sources et plusieurs résistances :

❑ a. est égale à la résistance équivalente du dipôle dans lequel on a éteint toutes les sources de tension ou de courant.
❑ b. est égale à la résistance mesurée entre les deux bornes du dipôle.
❑ c. est égale à la plus faible des résistances composant le dipôle.
❑ d. est égale à la plus élevée des résistances composant le dipôle.

7. Si la résistance équivalente de Thévenin d'un dipôle est nulle, celui-ci peut être considéré :

❑ a. comme un générateur de courant parfait.
❑ b. comme un générateur de tension parfait.
❑ c. comme un court-circuit.
❑ d. comme un circuit ouvert.

8. Deux générateurs réels caractérisés respectivement par les tensions E_1 et E_2 et par les résistances internes r_1 et r_2 sont placés en parallèle pour former un dipôle AB. La résistance équivalente de Thévenin de ce dipôle a pour expression :

❑ a. $\dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$
❑ b. $r_1 + r_2$
❑ c. $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$
❑ d. $\dfrac{r_1 + r_2}{2}$

Réponses

1. **b.** Il suffit pour s'en convaincre, de se référer au schéma de la fiche concernant le théorème de Millman. En appliquant la loi des nœuds au point X et en appelant I_i les courants parcourant les résistances R_i, orientés tous vers le point X, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0, \text{ soit } \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i - V_X}{R_i} = 0$$

$$\text{d'où : } \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{R_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{V_X}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{R_i} - V_X \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = 0$$

$$\text{soit : } V_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

2. **c.** Il s'agit d'appliquer strictement le théorème : le potentiel au point A est la moyenne des potentiels voisins, soit E, 0 et 0, pondérée par les inverses des résistances. La réponse b correspond à une erreur fréquemment commise et qui consiste à oublier au dénominateur les termes correspondant aux résistances reliées à la masse. Elles sont certes absentes du numérateur mais pas du dénominateur. Les réponses a et d sont fantaisistes.

3. **b.** Il s'agit bien du siemens, homogène à un Ω^{-1}.

4. **d.** Pour éteindre une source de courant, il faut la remplacer par un circuit ouvert. En considérant qu'une source de courant est éteinte lorsqu'elle produit un courant nul, cette ouverture du circuit est tout à fait logique.

5. **a.** Pour que le principe de superposition puisse s'appliquer, toutes les sources doivent être indépendantes et tous les éléments composant le circuit doivent être linéaires.

6. **a.** Il s'agit bien, pour déterminer la résistance équivalente de Thévenin d'un dipôle, d'éteindre toutes les sources, autrement dit de remplacer toutes les sources de tensions par des courts-circuits et toutes les sources de courant par des circuits ouverts, puis de calculer la résistance équivalente du dipôle uniquement résistif ainsi constitué.

7. **b.** Sur le schéma de la figure 2.3, on voit bien que l'annulation de la résistance transforme le dipôle en un générateur de tension parfait.

8. **a.** En éteignant les deux générateurs de tensions, le dipôle se résume à une association en parallèle des deux résistances r_1 et r_2.

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	Le théorème de Millman permet de réduire le nombre d'équations au cours de la résolution d'un problème d'électricité.	☐	☐
2.	Le théorème de Millman s'applique même lorsque l'une des branches reliées au point d'application comporte une source de courant.	☐	☐
3.	Il est possible d'utiliser le principe de superposition lorsque le circuit contient des bobines et des condensateurs.	☐	☐
4.	Le principe de superposition est une conséquence des propriétés de linéarité des dipôles.	☐	☐
5.	Une source de courant éteinte est à remplacer par un court-circuit.	☐	☐
6.	Si deux sources de tension sont liées, il est malgré tout possible d'utiliser le principe de superposition en gardant allumée ensemble toute paire de sources liées.	☐	☐
7.	La tension de Thévenin d'un circuit dipolaire correspond à sa tension à vide	☐	☐
8.	Le générateur de courant de Norton d'un circuit dipolaire correspond à son courant à vide.	☐	☐
9.	La résistance interne de Thévenin d'un circuit dipolaire est égale à la résistance interne du générateur de Norton équivalent.	☐	☐
10.	Le théorème de Thévenin s'applique uniquement en régime continu.	☐	☐
11.	Lorsqu'un circuit dipolaire complexe est relié à un générateur de tension parfait, la connaissance du dipôle équivalent de Thévenin de ce circuit permet de calculer directement le courant débité par le générateur.	☐	☐
12.	L'équivalence Thévenin Norton permet de déterminer tous les courants circulant dans un circuit quelconque.	☐	☐

Réponses

1. **Vrai.** L'avantage du théorème de Millman réside dans le fait qu'il ne génère que des équations aux tensions, sans faire intervenir les courants. Cela provient du fait qu'il contient déjà, en quelque sorte, les résultats qu'aurait pu fournir la loi des nœuds.

2. **Faux.** Il est facile de constater que le théorème de Millman nécessite, pour être appliqué, que toutes les branches considérées soient purement résistives. Dans le cas où l'une des branches contient une source de courant, il faut utiliser d'abord le principe de superposition pour appliquer le théorème de Millman lorsque la source est éteinte puis traiter à part la présence de cette source.

3. **Vrai.** Cela n'a que peu d'intérêt en régime continu mais les bobines et les condensateurs sont des composants linéaires donc ne posent aucun problème.

4. **Vrai.** Et par conséquent si un circuit comporte des composants non linéaires, il n'est pas possible d'utiliser le principe de superposition.

5. **Faux.** Une source de courant éteinte est à remplacer par un circuit ouvert. Ce sont les générateurs de tension que l'on remplace par des courts-circuits lorsque l'on veut les éteindre.

6. **Vrai.** Mais il convient de faire attention. On peut rencontrer des sources dépendantes ou liées lorsque l'on modélise des circuits complexes. Cela signifie qu'en agissant une des sources, on modifie le comportement de l'autre. On ne peut donc pas éteindre une des sources en gardant allumée la deuxième. Il faut toujours considérer que ces deux sources doivent être allumées simultanément.

7. **Vrai.** La tension à vide est la tension présente aux bornes du dipôle lorsque celui-ci n'est pas relié à un autre circuit ou générateur, autrement dit lorsqu'aucun courant ne le traverse.

8. **Faux.** Le courant de Thévenin est le courant de court-circuit. On relie les deux bornes du dipôle par un court-circuit et on évalue le courant circulant dans ce court-circuit. La notion de courant à vide ne correspond à rien puisque, à vide, aucun courant ne peu circuler dans le dipôle.

9. **Vrai.** Voir la fiche correspondante.

10. **Faux.** Le théorème de Thévenin s'applique aussi en régime sinusoïdal.

11. **Vrai.** Dès lors qu'un circuit dipolaire est réduit à son générateur de Thévenin équivalent et qu'on le connecte à une générateur, on a affaire à un circuit extrêmement simple composé de deux générateurs et d'une résistance. La deuxième loi de Kirchhoff appliquée à cette unique maille nous donne immédiatement le courant circulant dans la maille.

12. **Faux.** Il faut bien comprendre que lorsque l'on réduit un circuit dipolaire complexe à son générateur de Thévenin ou de Norton, toutes les informations internes au circuit sont perdues et que seules les informations externes sont accessibles (courant circulant globalement dans le dipôle et tension à ses bornes).

Entraînement

Exercices

1. Application simple du théorème de Millman *

Dans le montage représenté sur la Figure 2.7, déterminer le potentiel au point A.

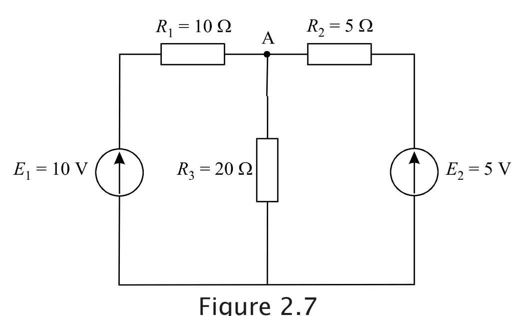


Figure 2.7

Conseil méthodologique

Il s'agit ici d'appliquer simplement le théorème. Le potentiel recherché s'exprime en fonction des potentiels aux nœuds voisins. Attention : une des branches est reliée à la masse.

2. Calcul d'un courant à partir du théorème de Millman **

Dans le montage représenté sur la Figure 2.8, déterminer la valeur du courant qui circule dans la résistance R_X.

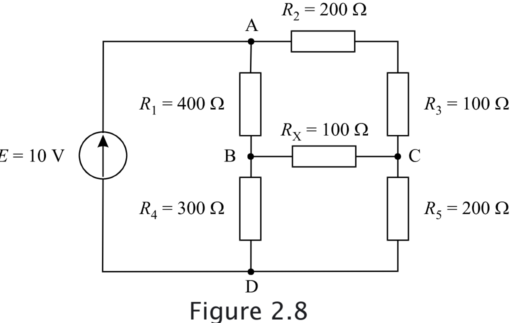


Figure 2.8

Conseil méthodologique

On commencera par nommer et par placer arbitrairement le courant dans la résistance R_X. Par exemple I_X orienté de B vers C. Le calcul de ce courant nécessite la connaissance de $V_B - V_C$, donc des deux potentiels V_B et V_C. C'est le théorème de Millman, appliqué deux fois, qui permet d'accéder à ces deux potentiels. Il peut être intéressant, ici, d'écrire le théorème de Millman en utilisant les conductances et ce, afin d'alléger l'écriture des équations.

3. Application du principe de superposition dans un circuit à deux générateurs *

Dans le montage représenté sur la figure 2.9, déterminer le courant I dans la résistance R_3.

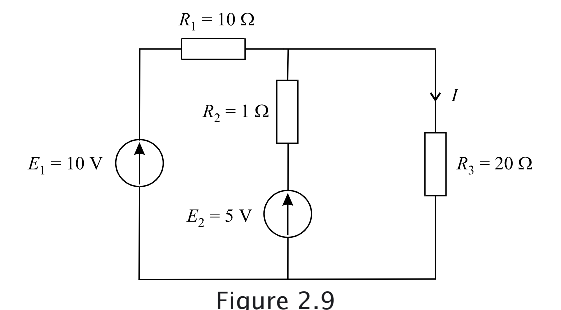


Figure 2.9

Conseil méthodologique

Il y a deux générateurs de tension dans le circuit. Le circuit n'étant composé que d'éléments linéaires, le courant I résulte de la superposition de deux courants : un courant que nous pouvons appeler I_1 et qui est dû à la seule présence de E_1 et un courant que nous pouvons appeler I_2 et qui est dû à la seule présence de E_2. Il s'agit bien ici d'appliquer le principe de superposition. Attention : lorsqu'on ń éteint ż une source de tension, on la remplace par un court-circuit.

4. Application du principe de superposition dans un circuit à trois générateurs **

Dans le montage représenté sur la figure 2.10, déterminer le courant I dans la résistance R_2.

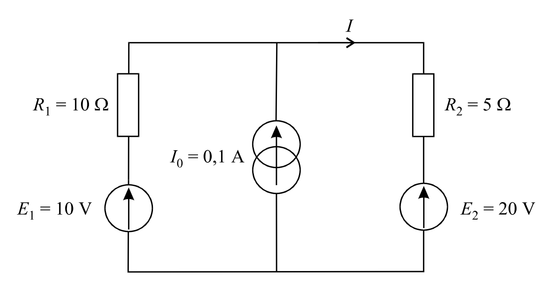


Figure 2.10

Conseil méthodologique

Il s'agit bien ici d'utiliser à nouveau le principe de superposition dans ce circuit linéaire qui possède trois générateurs. Le courant I s'exprime donc sous la forme d'une somme de trois courants. Attention : lorsqu'on ń éteint ż une source de courant, il faut la replacer par un circuit ouvert.

5. Calcul du générateur de Thévenin équivalent à un dipôle simple *

Déterminer le générateur équivalent de Thévenin du dipôle AB représenté sur la figure 2.11 en calculant successivement la résistance équivalente du dipôle puis sa tension à vide.

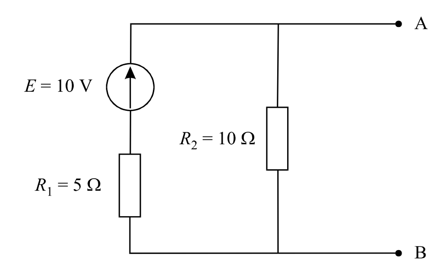


Figure 2.11

Conseil méthodologique

L'énoncé impose la méthode de détermination du dipôle équivalent de Thévenin, par un calcul successif de la résistance équivalente et de la tension à vide. La résolution de cet exercice se fait donc en deux temps. Pour calculer la résistance équivalente, il faut éteindre les sources. Puis, on détermine la tension à vide du dipôle qui n'est autre que la tension aux bornes de R_2.

6. Calcul du générateur de Thévenin équivalent à un dipôle *

Déterminer le générateur équivalent de Thévenin (E_0 et R_{eq}) du dipôle AB représenté sur la figure 2.12.

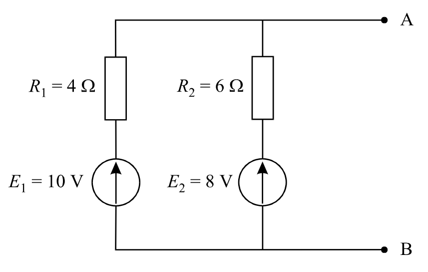


Figure 2.12

Conseil méthodologique

L'énoncé n'impose pas de méthode particulière pour déterminer les éléments du générateur de Thévenin. On peut procéder comme dans l'exercice 2.5 ou, pourquoi pas, effectuer des transformations Thévenin – Norton successives. Nous conseillons au lecteur d'opter pour cette seconde stratégie.

7. Calcul d'un courant par transformations Thévenin Norton successives ***

Déterminer le courant I dans la résistance R_5 du circuit représenté sur la figure 2.13.

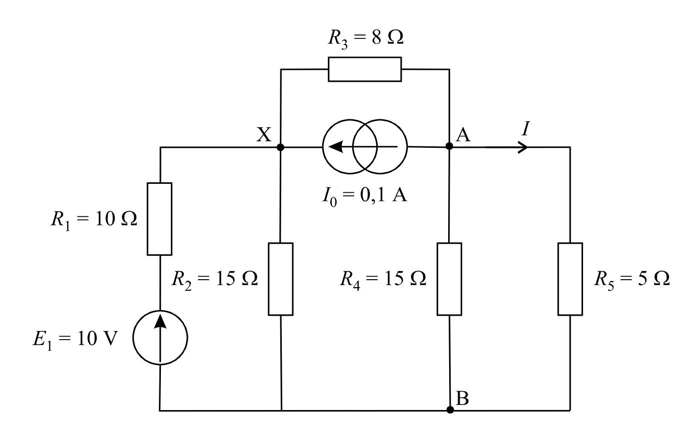


Figure 2.13

Conseil méthodologique

Le circuit proposé est suffisamment complexe pour nous dissuader de déployer des outils trop simples comme les lois de Kirchhoff qui nous conduiraient à un trop grand nombre d'équations. En remarquant que la résistance R_5 est en fait alimentée par le dipôle AB constitué du reste du circuit, il est préférable d'envisager la recherche du générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle AB, par exemple en effectuant des transformations Thévenin – Norton adéquates successives.

8. Calcul d'un courant par transformations Thévenin Norton successives **

Déterminer le courant I dans la résistance R du circuit représenté sur la figure 2.14, en n'utilisant que la technique de la transformation Thévenin-Norton.

Application numérique :

$E_1 = 10\,\text{V}$, $I_2 = 100\,\text{mA}$, $E_3 = 7\,\text{V}$

$R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $R = 30\,\Omega$

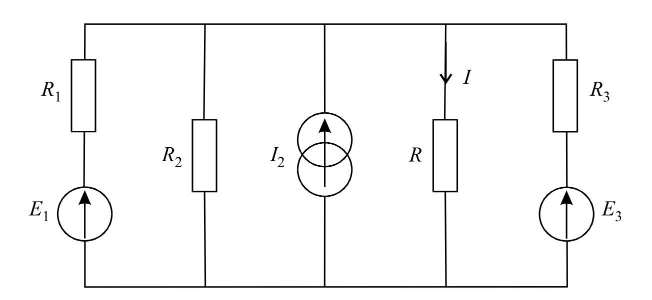


Figure 2.14

Conseil méthodologique

Le circuit proposé est constitué de plusieurs branches disposées en parallèle. On peut donc, sans rien modifier au montage, permuter les branches. Une de ces permutations permet de mettre en évidence le fait que la résistance R est en fait alimentée par le reste du circuit que nous considérerons comme un dipôle AB dont on cherchera le générateur équivalent de Thévenin.

9. Calcul d'une différence de potentiels à partir du théorème de Millman **

On considère le montage représenté sur la figure 2.15.

a. Déterminer l'expression du potentiel V_A en fonction de V_B et de E.

b. Déterminer l'expression du potentiel V_B en fonction de V_A.

c. En déduire la valeur de la différence de potentiels $V_A - V_B$.

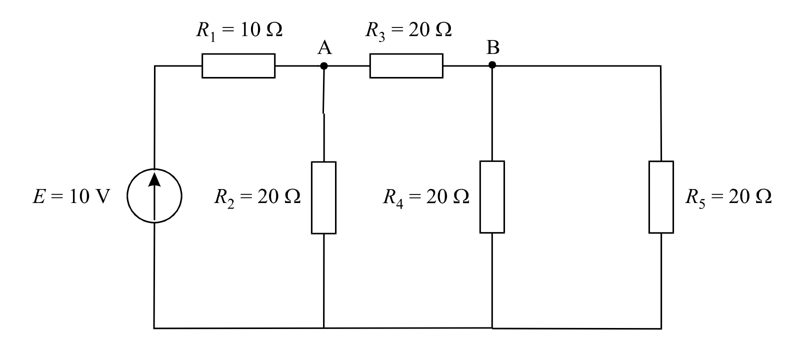


Figure 2.15

Conseil méthodologique

Pour répondre aux deux premières questions, il suffit d'appliquer le théorème de Millman d'abord au point A, puis au point B. En combinant les deux expressions, on arrive rapidement à la valeur de V_A puis à celle de V_B.

10. Transformation triangle étoile ***

On considère l'association des trois résistances R_1, R_2 et R_3 dite *en triangle*, représentée sur la figure 2.16. Soit I_A, I_B et I_C les courants entrant respectivement aux points A, B et C et V_A, V_B, V_C les tensions en ces mêmes points.

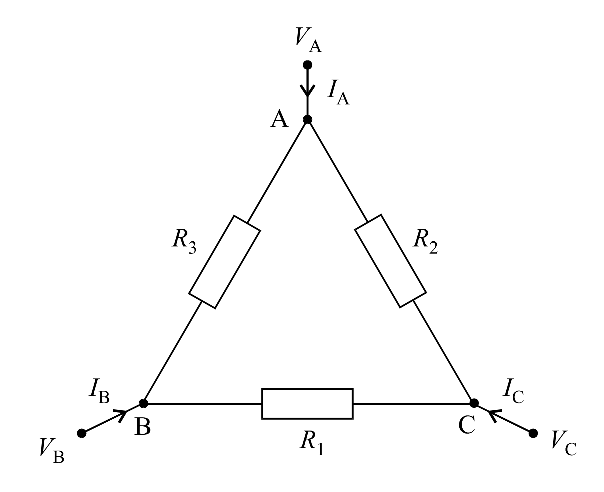


Figure 2.16

On se propose de démontrer qu'il existe une association dite *en étoile* équivalente à cette association en triangle, autrement dit, de montrer qu'il existe un schéma tel que celui représenté sur la figure 2.17, pour lequel les courants I_A, I_B et I_C sont inchangés, et ce pour les mêmes valeurs des tensions aux points A, B et C. On se propose de déterminer les valeurs de R_1, R_2 et R_3 en fonction de R_A, R_B et R_C.

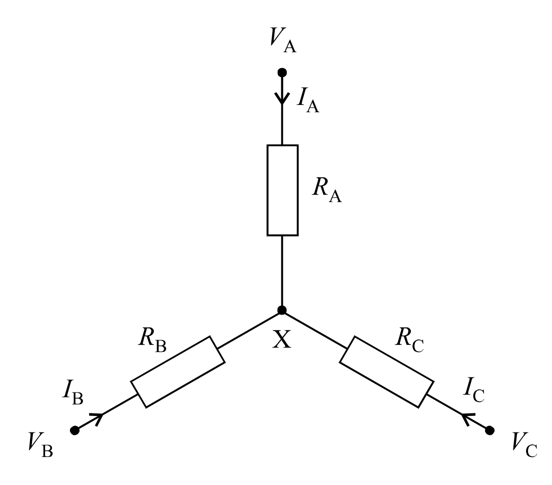


Figure 2.17

a. Dans le schéma de la figure 2.17, appliquer le théorème de Millman au point X et exprimer V_X en fonction de V_A, V_B et V_C.

b. En déduire les valeurs des courants I_A, I_B et I_C en fonction de V_A, V_B et V_C d'une part et de R_A, R_B et R_C d'autre part.

c. Dans le schéma de la figure 2.16, déterminer les courants I_A, I_B et I_C en fonction de V_A, V_B et V_C d'une part et de R_1, R_2 et R_3 d'autre part.

d. En déduire les valeurs de R_1, R_2 et R_3 en fonction de R_A, R_B et R_C.

e. On considère le circuit représenté sur la figure 2.18. En exploitant les résultats précédents et en calculant la résistance équivalente de l'ensemble du réseau de résistances, déterminer le courant I dans le circuit.

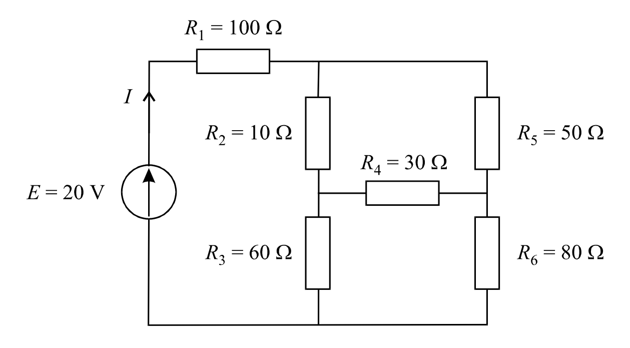


Figure 2.18

Conseil méthodologique

La première question ne pose aucune difficulté. On applique simplement le théorème de Millman pour disposer de l'expression du potentiel V_X. Cette expression est alors utilisée dans la question 2 pour calculer les expressions des courants demandés. On pourra se contenter de calculer I_A et d'en déduire les deux autres courants en remarquant la symétrie parfaite du dispositif. La question 3 propose de calculer les expressions des courants dans le montage triangle. Il convient ensuite d'identifier les expressions avec le montage étoile pour mettre en évidence les conditions d'équivalence recherchées. La question 5 est une application de cette transformation triangle – étoile : le calcul de la résistance équivalente du circuit nécessite une transformation de ce type.

11. Calcul d'un courant par transformations Thévenin Norton successives ***

On considère le montage représenté sur la figure 2.19 et on se propose de déterminer la valeur du courant I circulant dans la résistance R.

a. Montrer que la résistance R est alimenté par un dipôle AB que l'on identifiera.

b. Déterminer le générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle AB.

c. En déduire la valeur du courant I.

Conseil méthodologique

On peut bien sûr considérer que la résistance R est connectée à un dipôle formé du reste du circuit. Une fois la résistance R ôtée du circuit, on cherchera les transformations Thévenin – Norton successives qui nous amèneront à réduire le circuit à sa plus simple expression. Le calcul du courant recherché est alors immédiat.

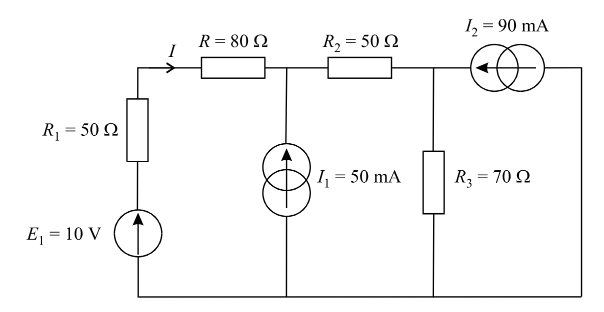


Figure 2.19

Réponses

1. Appliquons le théorème de Millman au point A :

$$V_A = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{0}{R_3} + \dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{\dfrac{10}{10} + \dfrac{5}{5}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{5}} = 5{,}7\ \text{V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : A priori, cet exercice ne présente aucune difficulté. Toutefois, une erreur est fréquemment commise dans l'application du théorème de Millman si on omet de comptabiliser au dénominateur les résistances situées dans les branches reliées à la masse.

2. Soit I_X le courant circulant dans la résistance R_X, orienté de B vers C.
La loi d'Ohm nous donne immédiatement :

$$I_X = \frac{V_B - V_C}{R_X}$$

Il suffit donc de calculer la différence de potentiels $V_B - V_C$.
Appliquons le théorème de Millman au point B.

$$V_B = \frac{\dfrac{V_A}{R_1} + \dfrac{V_D}{R_4} + \dfrac{V_C}{R_X}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_X}} = \frac{\dfrac{E}{R_1} + \dfrac{V_C}{R_X}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_X}}$$

car $V_D = 0$.
Nous avons obtenu une équation liant V_B et V_C. En appliquant le théorème de Millman au point C, nous obtiendrons une seconde équation avec les mêmes inconnues :

$$V_C = \frac{\dfrac{E}{R_2 + R_3} + \dfrac{V_B}{R_X}}{\dfrac{1}{R_2 + R_3} + \dfrac{1}{R_5} + \dfrac{1}{R_X}}$$

Ces expressions sont plus faciles à manipuler si on introduit les conductances des dipôles.

On posera, notamment : $$G_S = \frac{1}{R_2 + R_3}$$

Soit : $$V_B = \frac{G_1 E + G_X V_C}{G_1 + G_4 + G_X} \quad \text{et} \quad V_C = \frac{G_S E + G_X V_B}{G_S + G_5 + G_X}$$

Remplaçons V_C par son expression dans l'expression de V_B :

$$V_B = \frac{G_1 E + G_X \dfrac{G_S E + G_X V_B}{G_S + G_5 + G_X}}{G_1 + G_4 + G_X}$$

Soit : $$V_B = \frac{(G_S + G_5 + G_X) G_1 E + G_X (G_S E + G_X V_B)}{(G_1 + G_4 + G_X)(G_S + G_5 + G_X)}$$

D'où : $$V_B = E \frac{G_X G_S + G_1 (G_S + G_5 + G_X)}{(G_1 + G_4 + G_X)(G_S + G_5 + G_X) - G_X^2}$$

Application numérique :

$$G_X = 10^{-2}\ \text{S}, \quad G_1 = 2{,}5 \times 10^{-3}\ \text{S}, \quad G_S = 3{,}33 \times 10^{-3}\ \text{S}$$

$$G_4 = 3{,}33 \times 10^{-3}\,\text{S}, \quad G_5 = 5 \times 10^{-3}\,\text{S}$$

On a : $$V_B = 4{,}16\,\text{V}$$

D'où : $$V_C = \frac{G_S E + G_X V_B}{G_S + G_5 + G_X} = 4{,}09\,\text{V}$$

D'où le calcul du courant I_X :

$$I_X = \frac{V_B - V_C}{R_X} = \frac{4{,}16 - 4{,}09}{100} = 0{,}7\,\text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le théorème de Millman est un outil intéressant dès lors que l'on cherche à déterminer une grandeur isolée dans un circuit. On notera également que l'utilisation des conductances allège sensiblement les écritures. Par ailleurs, il convient de veiller à l'homogénéité des équations. Il est conseillé, lorsque les calculs génèrent des expressions relativement longues, de vérifier systématiquement que les équations sont bien homogènes avant de faire l'application numérique. Par exemple, dans l'équation donnant l'expression de V_B, on remarque effectivement que dans la fraction, le numérateur et le dénominateur sont homogènes à des conductances au carré. La fraction est donc bien sans dimension et V_B est bien homogène à une tension.

3. Dans un premier temps, court-circuitons E_2 (figure 2.20). Soit I_1 le courant dans la résistance R_3.

Calculons ce courant I_1 : il est clair que la connaissance du potentiel au point A nous permettra d'accéder à la valeur du courant I_1. Appliquons le théorème de Millman au point A.

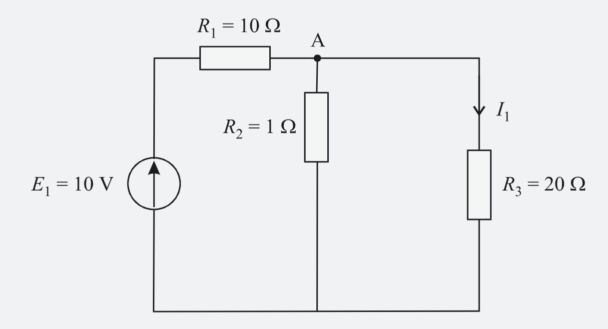


Figure 2.20

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{10}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{20}} = 0{,}87\,\text{V}$$

On en déduit immédiatement la valeur de I_1 :

$$I_1 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{0{,}87}{20} = 43{,}5\,\text{mA}$$

Dans un second temps, court-circuitons E_1 (figure 2.21). Soit I_2 le courant dans la résistance R_3.

Procédons de la même manière que précédemment en appliquant le théorème de Millman au point A :

$$V_A = \frac{\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{1} + \frac{1}{20}} = 4{,}35\,\text{V}$$

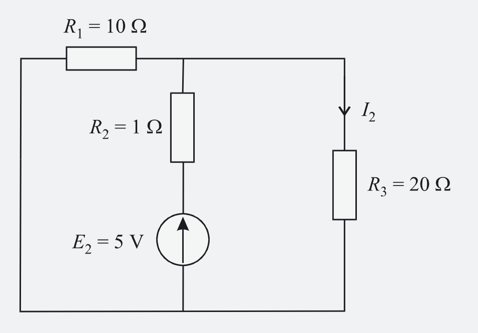


Figure 2.21

D'où :
$$I_2 = \frac{V_A}{R_3} = \frac{4{,}35}{20} = 217{,}5\ \text{mA}$$

Appliquons le principe de superposition : en présence des deux générateurs E_1 et E_2, le courant I dans la résistance R_3 vaut :

$$I = I_1 + I_2 = 43{,}5 \times 10^{-3} + 217{,}5 \times 10^{-3} = 261\ \text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le principe de superposition permet d'accéder rapidement à des grandeurs électriques, courants ou tensions, à l'intérieur d'un circuit comportant plusieurs sources. Ne pas oublier que ce principe s'applique à condition que le circuit soit bien linéaire et à condition que les sources soient indépendantes. Bien retenir qu'un générateur de tension est éteint lorsqu'il est remplacé par un court-circuit.

4. Nous allons calculer successivement ce courant en ne laissant subsister, à chaque fois, qu'un seul des trois générateurs.
En présence de E_1 seul, le circuit devient celui de la figure 2.22.

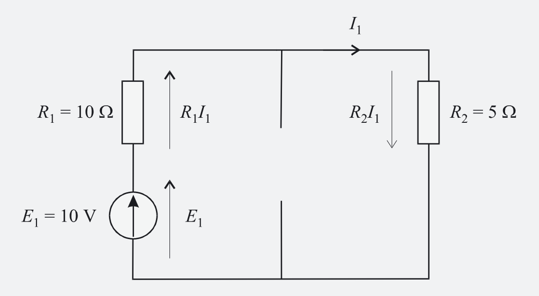


Figure 2.22

La loi des mailles nous donne :

$$E_1 - R_1I_1 - R_2I_1 = 0$$

Le courant I_1 qui circule dans R_2 vaut donc, de toute évidence :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{10}{15} = 0{,}66\ \text{A}$$

Ne jamais oublier que lorsqu'on annule un générateur de tension, on le court-circuite, et que lorsqu'on annule un générateur de courant, on le remplace par un circuit ouvert.
En présence de E_2 seul, le circuit devient celui de la figure 2.23.
La loi des mailles appliquée dans l'unique maille du circuit nous donne :

$$E_2 + R_1I_2 + R_2I_2 = 0$$

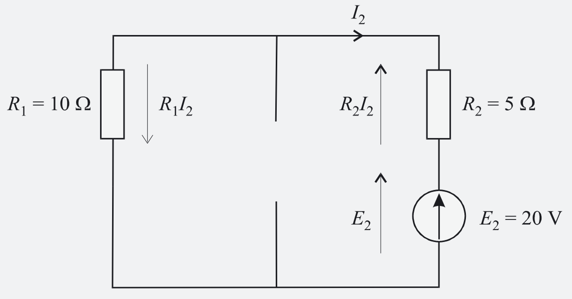


Figure 2.23

Soit :

$$I_2 = -\frac{E_2}{R_1 + R_2} = -\frac{20}{15} = -1{,}33\ \text{A}$$

Calculons pour terminer, le courant I_3 circulant dans la résistance R_2 en présence du seul générateur de courant (figure 2.24).

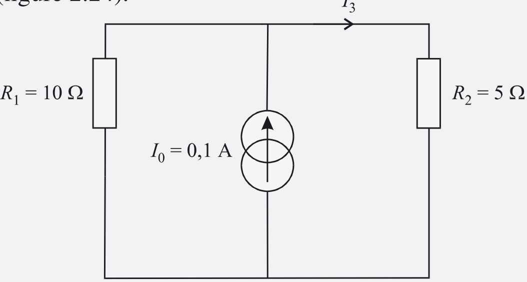


Figure 2.24

Modifions le dessin (sans changer le circuit) de manière à faire apparaître le fait que le générateur de courant débite dans une résistance équivalente à l'association parallèle de R_1 et R_2 (figure 2.25).

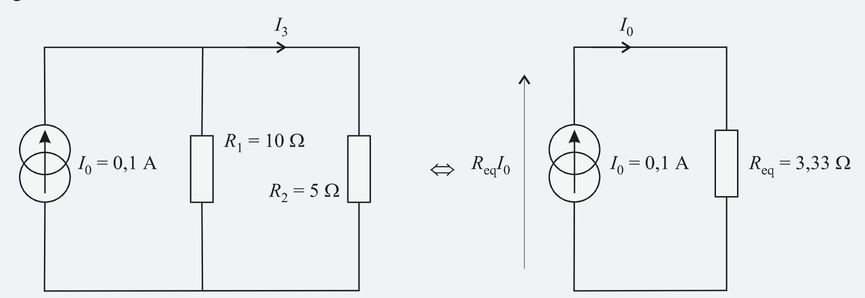


Figure 2.25

Le générateur débite donc dans une résistance R_{eq} telle que :

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 5}{10 + 5} = 3{,}33\,\Omega$$

La différence de potentiel aux bornes du générateur de courant vaut donc :

$$U = R_{eq}I_0 = 3{,}33 \times 0{,}1 = 0,\ 33\ \text{V}$$

En observant à nouveau le schéma de la figure 2.25, cette différence de potentiel se trouve également être la tension aux bornes de R_2. On a donc :

$$U = R_{eq}I_0 = R_2I_3$$

$$I_3 = \frac{R_{eq}I_0}{R_2} = \frac{0{,}33}{5} = 0{,}066\ \text{A}$$

Appliquons enfin le principe de superposition. En présence des trois générateurs, le courant I est égal à la somme des courants I_1, I_2 et I_3 :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0{,}66 - 1{,}33 + 0{,}066 = -0{,}6\,\text{A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il faut veiller à respecter scrupuleusement les conventions récepteurs pour tous les dipôles autres que le générateur, sinon, les calculs des courants seront inévitablement faux. Ne pas avoir peur de perdre du temps en dessinant toutes les flèches de tensions dans le circuit (en respectant les conventions) : une trop grande précipitation conduit souvent à des erreurs de signes. Par ailleurs, dans le principe de superposition, la notion de somme est algébrique. Dans notre problème, l'un des courants est négatif et doit rester négatif dans la somme finale. Le courant total dans R_2 étant négatif, cela signifie que le courant circule en réalité dans le sens opposé à celui proposé dans l'énoncé.

5. Le dipôle AB de la figure 2.11 est équivalent au générateur de Thévenin représenté sur la figure 2.26, R_{eq} représentant la résistance équivalente du dipôle lorsque E est court-circuité, et E_0 la tension à vide du dipôle.

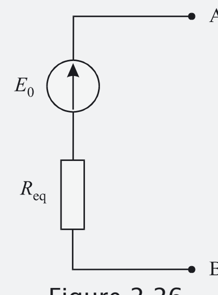


Figure 2.26

R_{eq} se trouve être la résistance équivalente à l'association parallèle de R_1 et R_2.

Donc : $$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 5}{10 + 5} = 3{,}33\,\Omega$$

Pour déterminer la tension à vide E_0 du dipôle AB, il suffit d'écrire la loi des mailles dans le circuit de la figure 2.11.

La tension aux bornes de R_2 correspondra bien à cette tension à vide (figure 2.27).

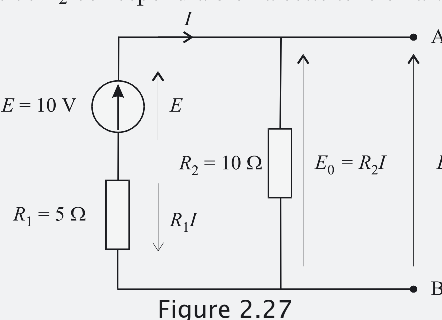


Figure 2.27

On a : $$\begin{cases} E_0 = R_2 I \\ E - R_2 I - R_1 I = 0 \end{cases}$$

D'où : $$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Soit : $$E_0 = E\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \times \frac{10}{15} = 6{,}67\,\text{V}$$

Le générateur de Thévenin équivalent au dipôle AB est donc un générateur de tension $E_0 = 6{,}67\,\text{V}$ et de résistance interne $R_{eq} = 3{,}33\,\Omega$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice ne présente aucune difficulté majeure. On retiendra que le générateur de Thévenin peut se déterminer en deux temps : on éteint l'ensemble des générateurs et on calcule la résistance équivalente du circuit ainsi simplifié ce qui nous donne la résistance de Thévenin ; on calcule ensuite la tension à vide du circuit (les générateurs étant allumés) qui est égale à la tension de Thévenin.

6. Transformons chacun des deux générateurs de tension en son dipôle équivalent de Norton puis regroupons les générateurs de courant d'une part (deux générateurs de courant en parallèle sont équivalents à un seul générateur de courant égal à la somme des deux courants) et les deux résistances d'autre part (figure 2.28).

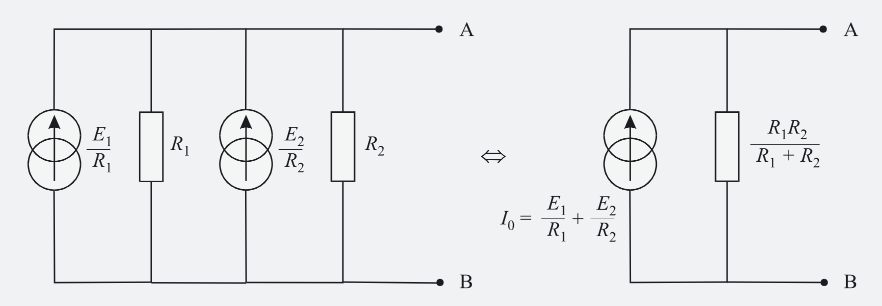


Figure 2.28

Nous avons obtenu le générateur équivalent de Norton du dipôle AB. La transformation Norton-Thévenin nous conduit à la figure 2.29.

Application numérique :

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{4\times 6}{4+6} = 2{,}4\,\Omega$$

$$E_0 = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1+R_2}$$

$$E_0 = \frac{(6\times 10) + (4\times 8)}{4+6} = 9{,}2\,\text{V}$$

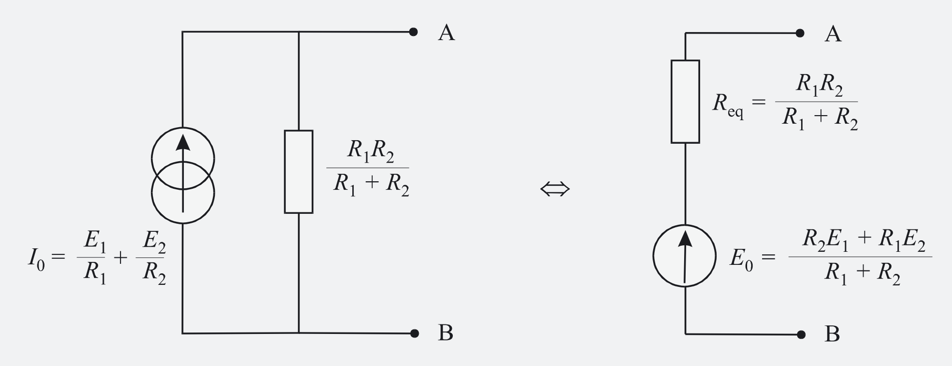


Figure 2.29

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La transformation Thévenin-Norton est un outil très performant : plusieurs transformations successives permettent d'obtenir très rapidement le générateur de Thévenin ou de Norton de pratiquement n'importe quel dipôle. Procéder de la sorte peut être plus rapide que de rechercher E_0 et R_{eq} d'après leur définition, comme nous l'avons fait dans l'exercice 2.5. Bien utilisés, les théorèmes de Thévenin et de Norton sont des moyens efficaces de résoudre des problèmes complexes d'électrocinétique.

7. Dans ce schéma, nous pouvons considérer que la résistance R_5 est alimentée par le dipôle AB. Nous allons rechercher le générateur de Thévenin équivalent à ce dipôle AB (autrement dit du

circuit démuni de sa résistance R_5), ce qui nous permettra de répondre facilement à la question. Dans ce dipôle AB, nous pouvons remplacer le générateur de tension E_1 et de résistance R_1 par un générateur de courant I_1 placé en parallèle avec une résistance R_1 (transformation Thévenin-Norton) :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = 1\ \text{A}$$

De même, le générateur de courant I_0 placé en parallèle avec la résistance R_3 est équivalent à un générateur parfait de tension E_0 en série avec cette même résistance R_3. Avec :

$$E_0 = R_3 I_0 = 0{,}8\ \text{V}$$

Après ces deux transformations, le dipôle AB se présente comme indiqué sur la figure 2.30.

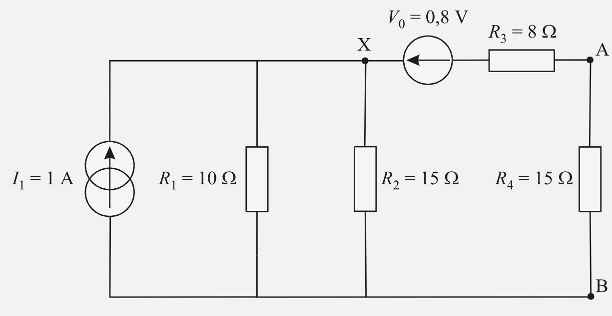


Figure 2.30

Les résistances R_1 et R_2 placées en parallèle forment une résistance équivalente R_0 telle que :

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6\ \Omega$$

Le générateur de courant I_1 se trouve donc en parallèle avec cette résistance R_0 et est donc équivalent à un générateur de tension E_2 placé en série avec cette résistance R_0 (figure 2.31). On a :

$$E_2 = R_0 I_1 = 6\ \text{V}$$

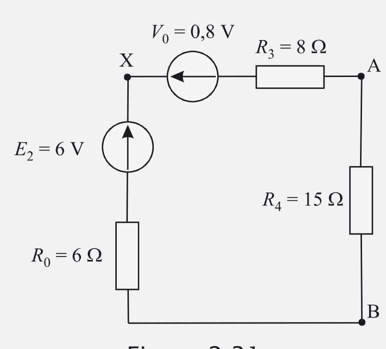


Figure 2.31

L'association série de R_0, E_2, V_0 et R_3 se simplifie de manière évidente en un générateur de tension $E_3 = 5{,}2$ V en série avec une résistance $R_6 = R_0 + R_3$ (figure 2.32).

Appliquons encore une fois la transformation Thévenin-Norton (figure 2.33).

Regroupons pour finir les deux résistances en parallèle et appliquons une dernière fois la transformation Norton-Thévenin (figure 2.34) de manière à obtenir le générateur de Thévenin équivalent du dipôle AB.

Alimentons la résistance R_5 de notre circuit de la figure 2.17 à l'aide de ce générateur équivalent (figure 2.35).

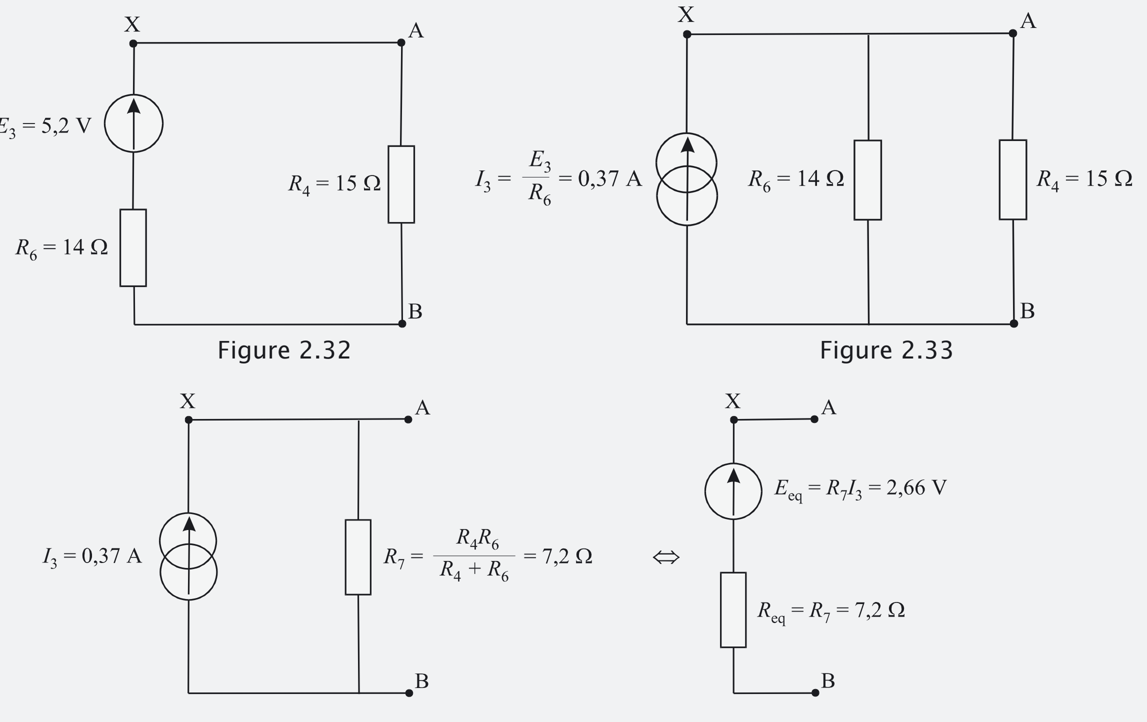


Figure 2.32

Figure 2.33

Figure 2.34

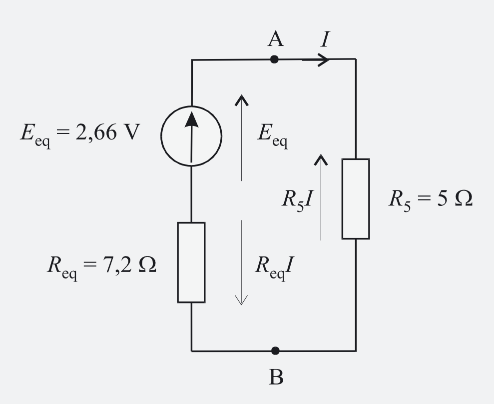


Figure 2.35

En appliquant la loi des mailles dans l'unique maille du circuit ainsi obtenu, on obtient (en prenant soin de respecter la convention récepteur pour les résistances) :

$$E_{eq} = R_{eq} I + R_5 I$$

D'où l'on tire immédiatement :

$$I = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_5}$$

Soit :

$$I = \frac{2{,}66}{7{,}2 + 5} = 0{,}22 \text{ A}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre que l'on peut résoudre des cas relativement complexes en ne faisant appel qu'aux théorèmes de Thévenin et de Norton. Cette technique permet d'éviter d'avoir à résoudre des équations multiples et de gagner énormément de temps en transformant pas à pas le circuit initial.

8. Notre circuit est formé de cinq dipôles placés en parallèle. Rien n'est changé à ce circuit si on effectue la légère transformation proposée sur la figure 2.36, qui consiste à considérer que la résistance R est alimentée par un dipôle AB. Nous allons rechercher le dipôle équivalent de Thévenin de ce dipôle AB afin de déterminer facilement le courant dans la résistance R.

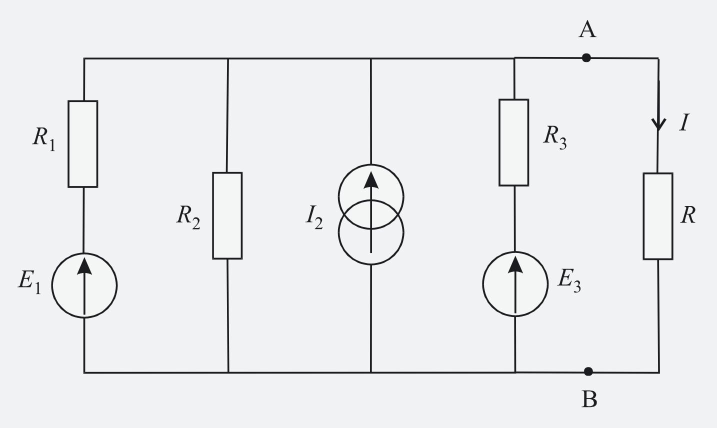


Figure 2.36

Transformons tout d'abord les deux générateurs de tension réels de ce dipôle AB en leurs générateurs équivalents de Norton respectifs, comme indiqué sur la figure 2.37.

Le dipôle AB ainsi transformé est équivalent à l'association parallèle de trois générateurs de courant et de trois résistances. Les trois générateurs de courant en parallèle sont équivalents à un seul générateur de courant d'intensité I_0 égal à la somme de ces trois courants. Quant à l'association parallèle des trois résistances, elle est évidemment équivalente à une résistance unique R_0 que nous calculons sans peine en utilisant les règles simples qui régissent les associations de résistances.

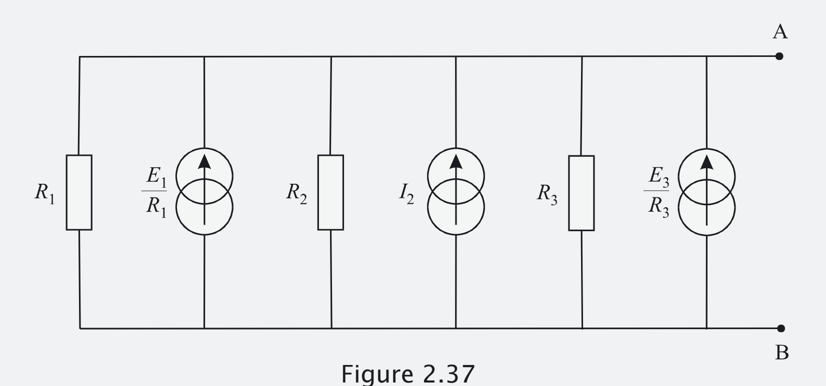


Figure 2.37

$$I_0 = \frac{E_1}{R_1} + I_2 + \frac{E_3}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_2R_1}{R_1R_2R_3}$$

Soit :
$$R_0 = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_2R_1}$$

Le dipôle AB de la figure 2.37 est donc équivalent au dipôle représenté sur la figure 2.38.

Nous avons ainsi obtenu le générateur équivalent de Thévenin du dipôle AB, de résistance interne R_0 et de tension $E_{eq} = R_0I_0$.

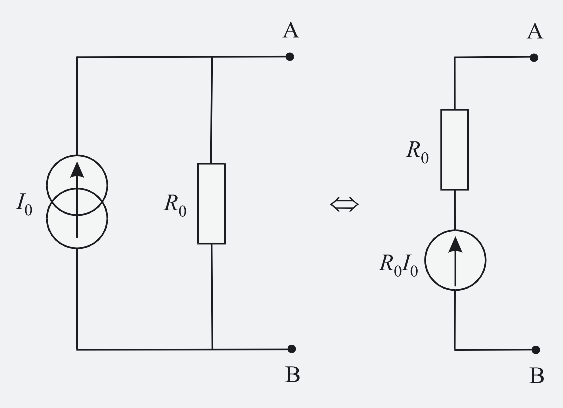


Figure 2.38

Le circuit initial se résume donc au schéma représenté sur la figure 2.39 d'où l'on tire immédiatement la valeur du courant.

Appliquons en effet la deuxième loi de Kirchhoff à l'unique maille du circuit :

$$E_{eq} - R_0 I - RI = 0$$

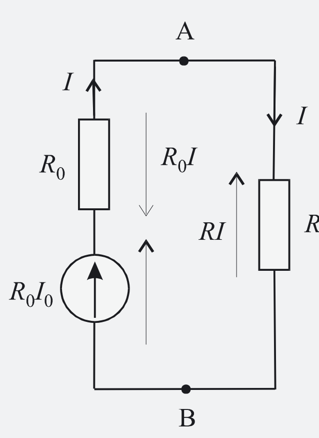


Figure 2.39

D'où :

$$I = \frac{E_{eq}}{R_0 + R} = \frac{R_0 I_0}{R_0 + R}$$

Soit :

$$I = \frac{\left(\dfrac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_2R_1}\right)\left(\dfrac{E_1}{R_1} + I_2 + \dfrac{E_3}{R_3}\right)}{\dfrac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_2R_1} + R}$$

Application numérique :

$$I_0 = \frac{10}{60} + 0{,}1 + \frac{7}{40} = 442\,\text{mA}$$

$$R_0 = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_2R_1} = 19{,}35\,\Omega$$

$$E_{eq} = 8{,}55\,\text{V}$$

D'où : $$I = \frac{E_{eq}}{R_0 + R} = \frac{8{,}55}{19{,}35 + 30} = 173\,\text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On retiendra tout d'abord la petite astuce utilisée pour transformer le schéma (sans rien modifier au fonctionnement du circuit, bien évidemment). Par ailleurs, nous avons une fois de plus obtenu la preuve que les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent d'accéder rapidement et efficacement, avec peu de calculs lourds, à la détermination de n'importe quelle grandeur électrique au sein d'un circuit, même complexe.

9. **1.** Appliquons le théorème de Millman au point A :

On a : $$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{0}{R_2} + \frac{V_B}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

2. Appliquons le théorème de Millman au point B :

On a : $$V_B = \frac{\frac{V_A}{R_3}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$

2. Remplaçons l'expression de cette tension V_B dans l'expression de V_A :

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{V_A}{R_3^2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{V_A}{R_3^2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)}$$

Regroupons les termes contenant V_A dans le même membre de cette équation, de manière à calculer facilement ce potentiel.

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_A}{R_3^2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)} = \frac{E_1}{R_1}$$

$$V_A = \frac{E_1}{R_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3^2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)}\right)^{-1}$$

Soit : $$V_A = 5{,}45\,\text{V}$$

D'où : $$V_B = 1{,}8\,\text{V}$$

Par conséquent :

$$V_B - V_A = 5,45 - 1,8 = 3,65\ V$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans un circuit simple, le théorème de Millman, appliqué en deux points différents d'un circuit, permet de déterminer l'intensité du courant circulant entre ces deux points.

10. **1.** En appliquant le théorème de Millman au point X, on obtient immédiatement :

$$V_X = \frac{\dfrac{V_A}{R_A} + \dfrac{V_B}{R_B} + \dfrac{V_C}{R_C}}{\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C}}$$

2. Calculons le courant I_A :

$$I_A = \frac{V_A - V_X}{R_A} = \frac{V_A\left(\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C}\right) - \dfrac{V_A}{R_A} - \dfrac{V_B}{R_B} - \dfrac{V_C}{R_C}}{R_A\left(\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C}\right)}$$

Soit, après simplification de cette expression :

$$I_A = \left(\frac{1}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}\right)\left[(R_B + R_C)\,V_A - R_C V_B - R_B V_C\right]$$

En remarquant que la complète symétrie du circuit nous permet de permuter les indices, on obtient :

$$I_B = \left(\frac{1}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}\right)\left[-R_C V_A + (R_C + R_A)\,V_B - R_A V_C\right]$$

$$I_C = \left(\frac{1}{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}\right)\left[-R_B V_A - R_A V_B + (R_A + R_B)\,V_C\right]$$

3. Exprimons que le courant I_A est la somme des courants dans R_3 et dans R_2 :

$$I_A = \frac{V_A - V_B}{R_3} + \frac{V_A - V_C}{R_2} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_A - \frac{V_B}{R_3} - \frac{V_C}{R_2}$$

On peut une fois de plus exploiter la symétrie du système et déduire les autres courants par simple permutation des indices :

$$I_B = -\frac{V_A}{R_3} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1}\right)V_B - \frac{V_C}{R_1}$$

$$I_C = -\frac{V_A}{R_2} - \frac{V_B}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_C$$

On remarquera que la symétrie est effectivement parfaite compte tenu de l'appellation des résistances : ainsi R_1 est la résistance reliant B à C.

4. Les deux schémas doivent être équivalents quelles que soient les tensions V_A, V_B et V_C. On doit donc identifier les deux jeux d'équations donnant les expressions des courants I_A, I_B et I_C dans les deux schémas, c'est-à-dire identifier les coefficients des tensions deux à deux.

On obtient ainsi, notamment :

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

Il y a théoriquement neuf coefficients à identifier. Trois d'entre eux suffisent pour obtenir ce résultat. Les autres identifications sont cohérentes avec ces valeurs.

On peut également exprimer les résistances R_A, R_B et R_C en fonction des résistances R_1, R_2 et R_3. On obtient alors les relations :

$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

5. Il sera très facile de calculer le courant I en connaissant la résistance équivalente du réseau. Soit R_{eq} cette résistance équivalente. Dans le circuit, on repère immédiatement une association de R_2, R_4 et R_5 en triangle. Cette association est équivalente à une étoile et le circuit de la figure 2.18 est donc équivalent au circuit de la figure 2.40.

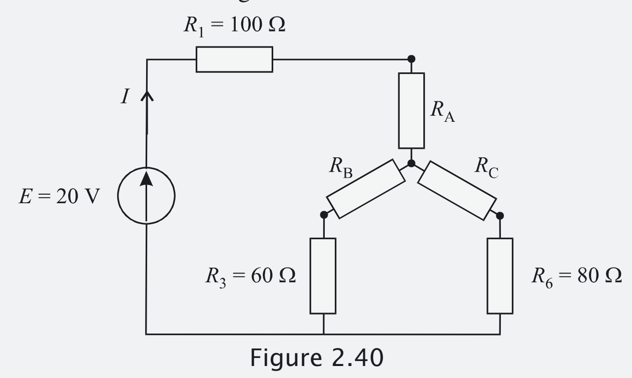


Figure 2.40

En appliquant les règles de la transformation triangle étoile, on obtient :

$$R_A = \frac{R_5 R_2}{R_2 + R_4 + R_5} = 5{,}6\,\Omega$$

$$R_B = \frac{R_4 R_2}{R_2 + R_4 + R_5} = 3{,}3\,\Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 16{,}7\,\Omega$$

Dans ce nouveau circuit, R_B et R_3 sont en série et forment une résistance équivalente de 63,3 Ω. Par ailleurs, R_C et R_6 forment une résistance équivalente de 96,7 Ω. Ces deux résistances de 63,3 Ω et de 96,7 Ω sont en parallèle et forment donc une résistance équivalente r telle que :

$$r = \frac{63{,}3 \times 96{,}7}{63{,}3 + 96{,}7} = 38{,}3\,\Omega$$

Cette résistance r se trouve finalement en série avec R_A et R_1 :

$$R_{eq} = R_1 + R_A + r = 100 + 5{,}6 + 38{,}3 = 143{,}9\,\Omega$$

D'où : $$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{20}{143{,}9} = 139\,\text{mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Les deux séries d'équations qui permettent de transformer une configuration étoile en triangle et réciproquement correspondent au **théorème de Kennelly**. Grâce à elles, on peut notamment transformer certains circuits de manière à calculer rapidement leur résistance équivalente, comme cela est montré à la question 5.

11. Considérons que la résistance R est alimentée par un dipôle AB constitué du reste du circuit et calculons le générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle (figure 2.41).

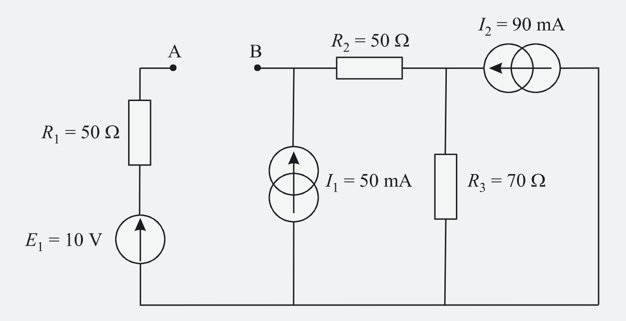


Figure 2.41

Organisons le schéma de manière à rendre plus visibles les transformations nécessaires (figure 2.42). Nous remarquons immédiatement que le générateur de courant I_2 est en parallèle avec la résistance R_3. Cette association est donc équivalente à un générateur de tension parfait $R_3 I_2$ placé en série avec cette même résistance R_3 (figure 2.43). Les deux résistances R_2 et R_3 étant en série, remplaçons-les par leur résistance équivalente $R_{23} = R_2 + R_3 = 120\,\Omega$ (figure 2.44).

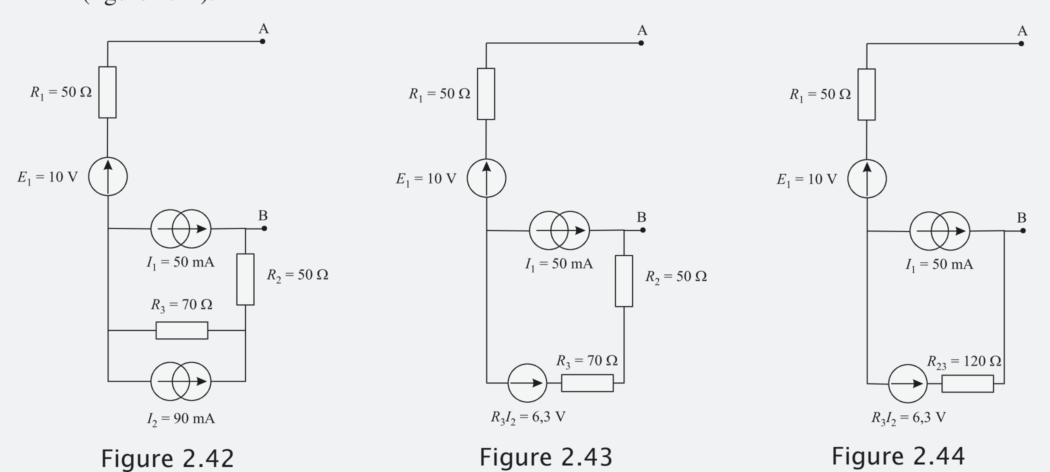


Figure 2.42 Figure 2.43 Figure 2.44

Retransformons le générateur de Thévenin constitué de la source de tension parfaite $R_3 I_2$ et de la résistance série R_{23} en un générateur de Norton (figure 2.45). Cela nous permet d'associer les deux générateurs de courant en un seul de courant I_0 (figure 2.46).

A.N. :
$$I_0 = I_1 + \frac{R_3 I_2}{R_{23}} = 50 \times 10^{-3} + \frac{6,3}{120} = 102,5\,\text{mA}$$

Figure 2.45 Figure 2.46

Ce générateur de courant en parallèle avec la résistance R_{23} peut être transformé en son générateur de Thévenin équivalent (figure 2.47), autrement dit par un générateur de tension parfait E_0 en série avec cette même résistance R_{23}.

$$E_0 = R_{23} I_0 = 120 \times 102{,}5 \times 10^{-3} = 12{,}3\ \text{V}$$

Le dipôle AB se résume donc à l'association série de deux générateurs de tension parfaits et de deux résistances. Il est donc équivalent à un seul générateur de tension E_{eq} égale à la somme algébrique des deux tensions E_0 et E muni d'une résistance série R_{eq}.

Nous parlons bien ici de somme algébrique. Les deux générateurs ne sont pas placés dans le même sens. Le générateur équivalent possédera donc une tension équivalente égale à la différence des deux.

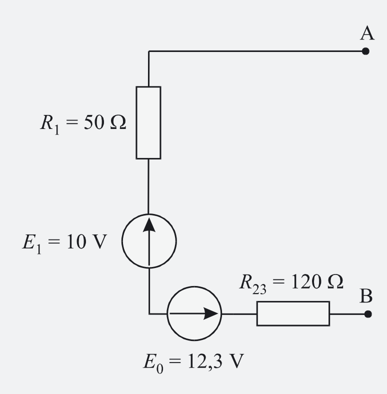


Figure 2.47

Nous avons donc bien obtenu le générateur équivalent de Thévenin du dipôle AB (figure 2.48), avec :

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = 170\ \Omega$$

$$E_{eq} = E - E_0 = -2{,}3\ \text{V}$$

On fera particulièrement attention au signe de la tension E_{eq}, qui, orientée comme indiqué sur la figure 2.49, correspond bien à $E - E_0$, les deux sources étant orientées différemment.

Le circuit initial est donc équivalent à ce générateur de Thévenin alimentant la résistance R (figure 2.49).

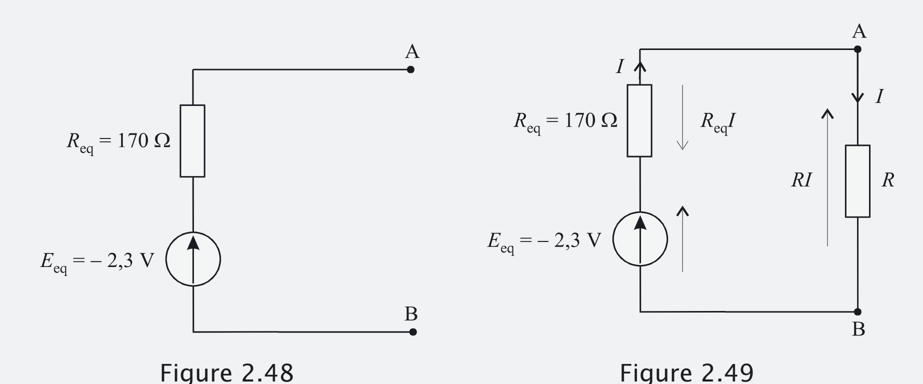


Figure 2.48 Figure 2.49

Plaçons les différentes tensions aux bornes de chaque dipôle et écrivons la loi des mailles dans ce circuit.

On obtient : $E_{eq} - R_{eq}I - RI = 0$

Soit : $I = \dfrac{E_{eq}}{R_{eq} + R} = \dfrac{-2{,}3}{170 + 80} = -9{,}2\ \text{mA}$

Lors de la dernière étape qui consiste à calculer le courant dans la résistance R, on veillera à respecter le sens du courant proposé dans l'énoncé. Ici, de A vers B. C'est dans ce sens que le courant est négatif. On peut l'orienter dans l'autre sens en le comptant positivement.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Comme cela a déjà été mis en évidence dans la série d'exercices proposés, nous avons ici une preuve éloquente de la puissance des théorèmes de Thévenin et de Norton. Dès lors qu'il s'agit de déterminer une différence de potentiels ou un courant dans un circuit complexe, il est toujours recommandé de faire appel à ces outils.

Les circuits électriques en régime sinusoïdal

3

Mots-clés

■ amplitude ■ fréquence ■ période ■ pulsation ■ déphasage ■ valeur efficace ■ impédance ■ représentation complexe ■ impédance complexe ■ diagramme de Fresnel

Le régime sinusoïdal fait partie des régimes permanents les plus couramment rencontrés pour la bonne et simple raison que l'énergie électrique est la plupart du temps produite, transportée et distribuée sous la forme de tensions sinusoïdales. Ainsi, la tension délivrée par nos prises électriques domestiques est-elle de forme sinusoïdale. Ce type de signal peut être utilisé directement par certains appareils mais doit parfois être transformé en signal continu. Nous en reparlerons au chapitre 7. Pour le moment, nous allons nous contenter d'étudier le fonctionnement des circuits linéaires fonctionnant en régime sinusoïdal c'est-à-dire alimentés par des générateurs sinusoïdaux. Le modèle de représentation complexe est l'outil principalement utilisé ici car il permet d'appliquer toutes les lois et tous les théorèmes déjà étudiés en régime continu.

Le régime sinusoïdal

L'étude des circuits linéaires en régime sinusoïdal correspond à l'étude des réseaux électriques composés uniquement d'éléments linéaires (résistances, condensateurs et auto-inductances, notamment), alimentés par des sources de tension ou de courant sinusoïdales (voir l'exemple de la figure 3.1). Pour une source de tension, par exemple, on considérera en général :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t$$

Très souvent, on parle également de *signal* sinusoïdal.

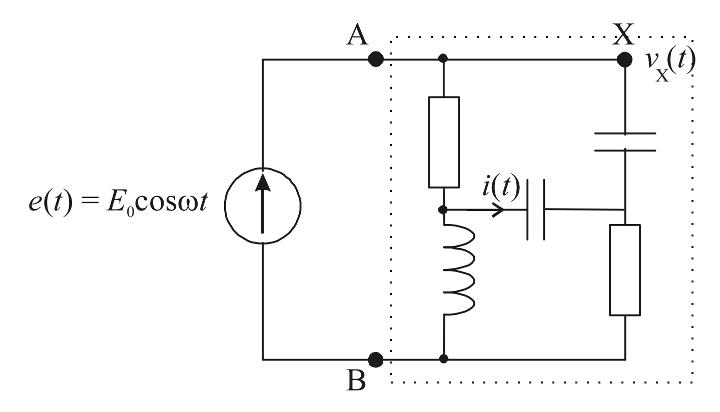


Figure 3.1

E_0 représente *l'amplitude* de la tension sinusoïdale (en volts), ω est sa *pulsation* en radians par seconde. On définit à partir de ces grandeurs, les paramètres suivants (voir figure 3.2) :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ : fréquence du signal en hertz (Hz)}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ : période en secondes}$$

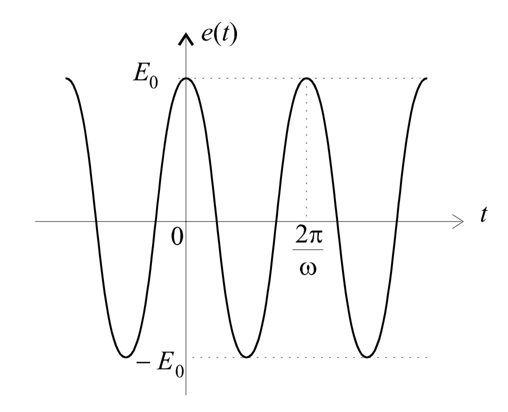


Figure 3.2

Le régime sinusoïdal fait partie (avec le régime continu) des *régimes permanents* (par opposition aux régimes variables ou *transitoires*, voir chapitre suivant). Pour diverses raisons, l'énergie électrique est fournie sous la forme d'un signal sinusoïdal. Ceci confère à l'étude des circuits en régime sinusoïdal un intérêt primordial.

Théorème

Dans un circuit fonctionnant en régime sinusoïdal, tous les courants et toutes les tensions dans le circuit sont sinusoïdaux, de même pulsation que la source d'alimentation du circuit.

Ces grandeurs électriques possèdent des amplitudes qui dépendent bien évidemment des éléments du circuit, mais aussi de la pulsation ω de la source. De plus, toutes ces grandeurs présentent la plupart du temps des déphasages par rapport à la source principale. Dans notre exemple de la figure 3.1, on peut donc écrire, a priori :

$$i(t) = I_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad v_X(t) = V_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Les paramètres φ_1 et φ_2 sont respectivement les *déphasages* de $i(t)$ et de $v_X(t)$ par rapport à la source $e(t)$. Pour être plus précis, il faut les appeler « *avances algébriques de phase* » puisqu'ils sont comptés positivement. Lorsqu'un déphasage est négatif, il traduit donc un *retard de phase*. Lorsque deux signaux présentent un déphasage de $\pi/2$, ils sont dits *en quadrature de phase*. S'ils sont déphasés de π, ils sont dits *en opposition de phase*. I_1 est *l'amplitude* du courant sinusoïdal $i(t)$. V_2 est *l'amplitude* de la tension sinusoïdale $v_X(t)$ au point X. φ_1, φ_2, I_1, V_2 dépendent de E_0 et des valeurs des différents éléments du circuits, mais également de la pulsation ω.

Pour des raisons qui seront explicitées plus loin (notamment au chapitre 5), on introduit, pour les grandeurs sinusoïdales, la notion de valeur efficace.

On pose :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t = E_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t,$$

$$i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad v_X(t) = V_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Les paramètres E_{eff}, I_{eff} et V_{eff} sont appelées valeurs efficaces, respectivement de $e(t)$, $i(t)$ et $v_X(t)$.

Fiche 2

Notion d'impédance

Lorsqu'un dipôle passif est alimenté par une source de tension sinusoïdale $e(t)$, il est parcouru par un courant $i(t)$ sinusoïdal dont l'amplitude I_0 peut être déterminée par l'équation :

$$E_0 = Z \cdot I_0 \quad \text{ou encore} \quad E_{eff} = Z \cdot I_{eff}$$

où Z représente *l'impédance* (exprimée en Ω) du dipôle. Cette équation traduit le fait que la loi d'Ohm s'applique en régime sinusoïdal à condition de considérer les amplitudes des grandeurs électriques.

Pour les dipôles usuels, les valeurs des impédances sont résumées sur la figure 3.3. On remarquera que ces impédances dépendent de la pulsation de la source $e(t)$, ce qui corrobore bien le fait que les amplitudes des courants et tensions dans un circuit en régime sinusoïdal dépendront bien de la pulsation de la source d'alimentation.

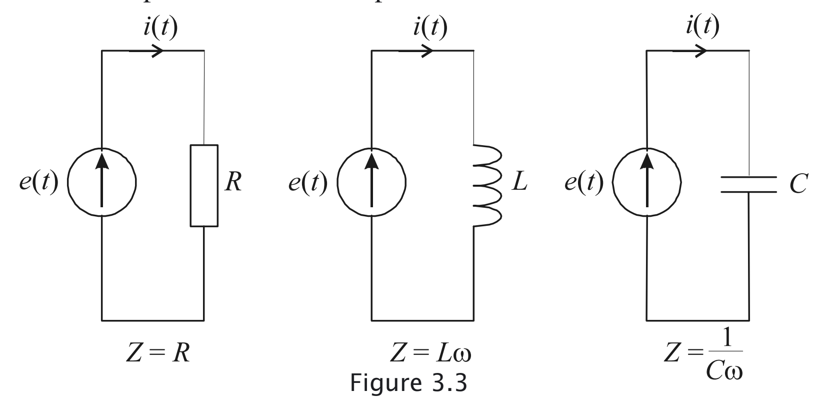


Figure 3.3

Fiche 3

Modèle complexe d'un circuit en régime sinusoïdal

En considérant une grandeur électrique sinusoïdale $u(t)$, on peut écrire :

$$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) = \Re\left[U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) + jU_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)\right]$$
$$= \Re\left[U_{eff}\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}\right]$$

On transpose alors la plupart du temps le schéma réel du circuit sous la forme d'un modèle dit *complexe*, dans lequel les grandeurs sont remplacées par leurs *formes complexes* notées $\overline{U}$.

Cette forme complexe est issue de l'association, à la grandeur électrique réelle $u(t)$, de la fonction complexe $U_{eff}\sqrt{2}e^{j\omega t}$.

Comme dans un circuit, toutes les grandeurs sont sinusoïdales de même pulsation que la source et que chacune de ces grandeurs possède une valeur efficace, on retiendra l'association suivante :

$$u(t) \rightarrow \overline{U} = U_{eff}e^{j\varphi}$$

Dans ce modèle (qui n'est rien d'autre qu'une représentation théorique du circuit), tout dipôle linéaire possède une impédance dite *complexe* $\overline{Z} = R + jX$ où R représente sa *résistance* et X sa *réactance*.

Le module de $\overline{Z}$, noté Z correspond à l'impédance réelle telle qu'elle est décrite dans le paragraphe précédent.

On a : $$Z = \left|\overline{Z}\right| \Leftrightarrow \overline{Z} = Ze^{j\arg(\overline{Z})}$$

La figure 3.4 présente les valeurs des impédances complexes des trois dipôles passifs usuels.

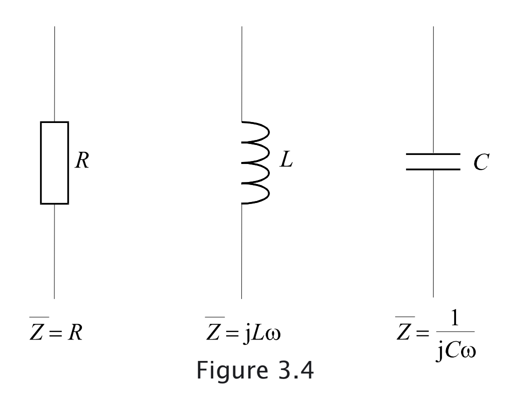


Figure 3.4

En représentant le nombre complexe $\overline{Z} = R + jX$ dans le plan complexe, on obtient le diagramme dit *de Fresnel* (figure 3.5) qui permet d'obtenir un certain nombre de relations très utiles.

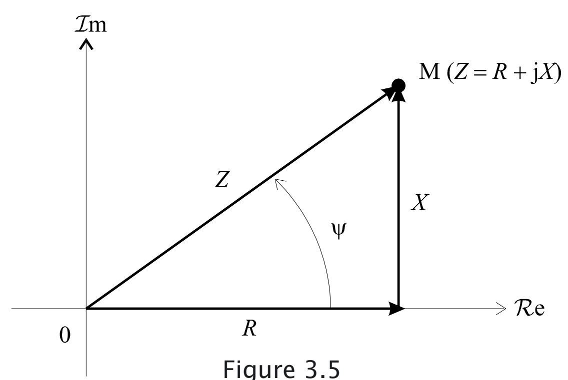


Figure 3.5

Soit : $$\psi = \arg(\overline{Z})$$

On a : $$\tan\psi = \frac{X}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\cos\psi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$\sin\psi = \frac{X}{Z} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

Dans le modèle complexe, tout courant $i(t)$ ou tension $u(t)$ dans le circuit possède une représentation complexe $\overline{I}$ ou $\overline{U}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\overline{I} = I_{eff}e^{j\varphi_1} \text{ avec } I_{eff} = \left|\overline{I}\right| \text{ : valeur efficace de } i(t)$$

et : $$\varphi_1 = \arg(\overline{I}) \text{ : déphasage de } i(t) \text{ par rapport à } e(t).$$

ou encore :

$$\overline{U} = U_{eff}e^{j\varphi_2} \text{ avec } U_{eff} = \left|\overline{U}\right| \text{ : valeur efficace de } u(t)$$

et : $$\varphi_2 = \arg(\overline{U}) \text{ : déphasage de } u(t) \text{ par rapport à } e(t).$$

Autrement dit, chaque grandeur électrique du circuit (courant ou tension), possède une représentation complexe définie par :

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \overline{I} = I_{eff}e^{j\varphi_1}$$

$$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \overline{U} = U_{eff}e^{j\varphi_2}$$

Fiche 4

Lois et théorèmes de l'électricité en régime sinusoïdal

Nous prendrons systématiquement pour habitude de transposer tout circuit électrique alimenté par un générateur sinusoïdal dans sa représentation complexe. À titre d'exemple, le circuit de la figure 3.1 possède pour représentation complexe le schéma de la figure 3.6.

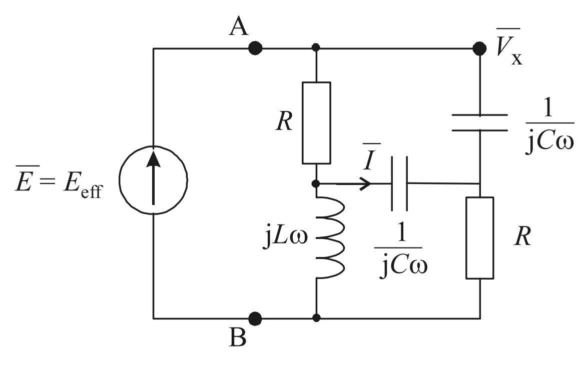


Figure 3.6

En représentation complexe, la loi d'Ohm reste valable (figure 3.7).

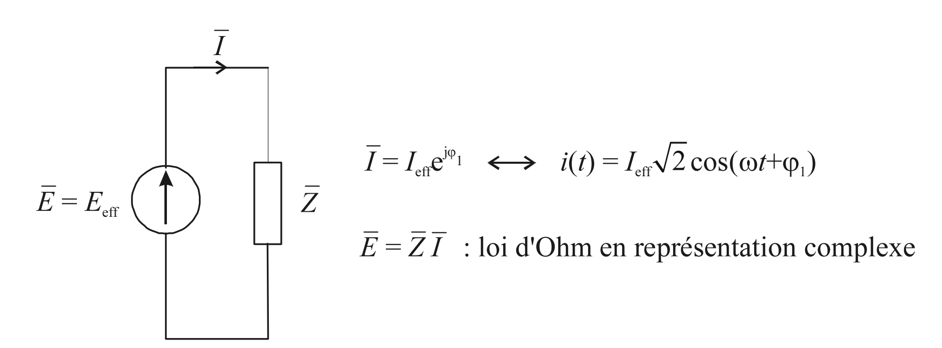


Figure 3.7

L'expression de la loi d'Ohm en représentation complexe peut se décomposer :

$$\overline{E} = \overline{Z}\cdot\overline{I} \Rightarrow \begin{cases} E_{eff} = ZI_{eff} \\ \arg(\overline{E}) = \arg(\overline{Z}) + \arg(\overline{I}) \end{cases}$$

soit encore pour ce qui est de l'équation aux arguments :

$$0 = \arg(\overline{Z}) + \varphi_1$$

On en déduit donc que l'avance algébrique de phase du courant qui circule dans un dipôle alimenté par une source de tension sinusoïdale est :

$$\varphi_1 = -\arg(\overline{Z})$$

Théorème

Dans le schéma électrique transposé à sa représentation complexe, toutes les lois de l'électricité valables pour le régime continu, s'appliquent aux grandeurs et variables complexes.

Dans cette représentation complexe, en prenant soin de considérer l'impédance complexe de chaque dipôle, on peut donc écrire :

- les lois de Kirchhoff ;
- le théorème de Millman ;
- le principe de superposition ;
- les théorèmes de Thévenin et de Norton.

Les règles qui régissent les associations de dipôles sont également transposables au modèle complexe.

Entraînement

QCM

1. Dans l'expression $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$, φ représente :

❑ a. le déphasage.

❑ b. La phase.

❑ c. le retard algébrique de phase à l'origine des temps.

❑ d. l'avance algébrique de phase à l'origine des temps.

2. Une résistance R est placée en série avec un condensateur de capacité C. On suppose que le dipôle est alimenté par une source sinusoïdale de pulsation ω. L'impédance complexe de ce dipôle est égale à :

❑ a. $\bar{Z} = R + \dfrac{1}{jC\omega}$

❑ b. $\bar{Z} = R + jC\omega$

❑ c. $\bar{Z} = \dfrac{R}{jC\omega}$

❑ d. $\bar{Z} = jRC\omega$

3. Une résistance R est placée en parallèle avec un condensateur de capacité C. On suppose que le dipôle est alimenté par une source sinusoïdale de pulsation ω. L'impédance complexe de ce dipôle est égale à :

❑ a. $\bar{Z} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$

❑ b. $\bar{Z} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$

❑ c. $\bar{Z} = \dfrac{R}{1 + jC\omega}$

❑ d. $\bar{Z} = \dfrac{R}{jC\omega}$

4. Une résistance R est placée en série avec une bobine d'auto-inductance L. On suppose que le dipôle est alimenté par une source sinusoïdale de pulsation ω. L'impédance complexe de ce dipôle est égale à :

❑ a. $\bar{Z} = R + \dfrac{1}{jL\omega}$

❑ b. $\bar{Z} = jRL\omega$

❑ c. $\bar{Z} = R + jL\omega$

❑ d. $\bar{Z} = \dfrac{R}{jL\omega}$

5. Une résistance R est placée en parallèle avec une bobine d'auto-inductance L. On suppose que le dipôle est alimenté par une source sinusoïdale de pulsation ω. L'impédance complexe de ce dipôle est égale à :

❑ a. $\bar{Z} = jRL\omega$

❑ b. $\bar{Z} = R + jL\omega$

❑ c. $\bar{Z} = \dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega}$

❑ d. $\bar{Z} = \dfrac{R}{R + jL\omega}$

6. Laquelle de ces expressions est, par nature, fausse :

❑ a. $e(t) = E_0 \cos \omega t - V_1 \sin 2\omega t$

❑ b. $\bar{E} = E_0$

❑ c. $e(t) = E_0 e^{j\omega t}$

❑ d. $\bar{I} = \dfrac{E_0}{jL\omega} e^{-j\omega t}$

7. Une résistance R est alimentée par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Quelle est la valeur efficace du courant qui circule dans la résistance ?

❑ a. $I = \dfrac{E_0}{R\sqrt{2}}$

❑ b. $I = \dfrac{E_0}{R}$

❑ c. $I = \dfrac{E_0\sqrt{2}}{R}$

❑ d. $I = \dfrac{E_0}{2R}$

8. L'impédance réelle d'une bobine d'auto-inductance $L = 2$ mH alimentée par une source sinusoïdale de pulsation $\omega = 1000$ rad/s a pour impédance réelle :

❑ a. $Z = 2000\ \Omega$

❑ b. $Z = 500\ \Omega$

❑ c. $Z = 0,5\ \Omega$

❑ d. $Z = 2\ \Omega$

9. Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F alimenté par une source sinusoïdale de pulsation $\omega = 1000$ rad/s a pour impédance réelle :

❑ a. $Z = 100\ \Omega$

❑ b. $Z = 10^{-2}\ \Omega$

❑ c. $Z = 1\ \Omega$

❑ d. $Z = 10^5\ \Omega$

10. Une résistance $R = 6\ \Omega$ est placée en série avec une bobine d'auto-inductance $L = 4$ mH. On suppose que le dipôle est alimenté par une source sinusoïdale de pulsation $\omega = 2000$ rad/s. L'impédance réelle de ce dipôle est égale à :

❑ a. $Z = 14\ \Omega$

❑ b. $Z = 10\ \Omega$

❑ c. $Z = 4\ \Omega$

❑ d. $Z = 100\ \Omega$

11. Une bobine d'auto-inductance $L = 50$ mH est alimentée par une source de tension sinusoïdale de valeur efficace $E_{eff} = 200$ V et de fréquence $f = 50$ Hz. Quelle est la valeur I_0 de l'amplitude du courant qui traverse la bobine ?

❑ a. $I_0 = 88$ A

❑ b. $I_0 = 123$ A

❑ c. $I_0 = 20$ A

❑ d. $I_0 = 14$ A

12. Un condensateur de capacité $C = 2000\ \mu$F est placé en série avec une résistance $R = 2\ \Omega$. Ce dipôle est alimenté par une source de tension sinusoïdale de valeur efficace $E_{eff} = 5$ V et de pulsation $\omega = 300$ rad/s. Quelle est la valeur I_0 de l'amplitude du courant qui traverse le dipôle ?

❑ a. $I_0 = 2,7$ A

❑ b. $I_0 = 1,9$ A

❑ c. $I_0 = 0,74$ A

❑ d. $I_0 = 1$ A

Réponses

1. **d.** On ne peut parler de déphasage qu'en présence de deux signaux que l'on compare entre eux. Le terme de phase, quant à lui, n'est pas assez précis. Les réponses a et b sont donc à éliminer. En présence d'un signal isolé, φ représente le déphasage qui caractérise le signal lorsque $t = 0$: $e(0) = E_0 \cos(\varphi)$. On parle alors d'angle à l'origine ou d'avance algébrique de phase si $\varphi > 0$ est positif ou encore de retard algébrique de phase si $\varphi < 0$. Le signe +, ici, nous incite à choisir la réponse d.

2. **a.** Lorsque deux dipôles sont associés en série, leurs impédances complexes s'ajoutent. L'impédance de la résistance vaut R et l'impédance du condensateur vaut $\dfrac{1}{jC\omega}$ donc on a bien $\bar{Z} = R + \dfrac{1}{jC\omega}$.

3. **b.** Dans le cas d'une association en parallèle, ce sont les inverses des impédances qui s'ajoutent. En appelant respectivement $\bar{Z}_R$ et $\bar{Z}_C$ les impédances de la résistance et du condensateur, on a :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C}, \text{ soit } \bar{Z} = \frac{\bar{Z}_R\bar{Z}_C}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C}$$

$$\text{d'où : } \bar{Z} = \frac{R \times \dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

4. **c.** Lorsque deux dipôles sont associés en série, leurs impédances complexes s'ajoutent. L'impédance de la résistance vaut R et l'impédance de la bobine vaut $jL\omega$ donc on a bien $\bar{Z} = R + jL\omega$.

5. **c.** Dans le cas d'une association en parallèle, ce sont les inverses des impédances qui s'ajoutent. En appelant respectivement $\bar{Z}_R$ et $\bar{Z}_L$ les impédances de la résistance et de la bobine, on a :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_L}, \text{ soit } \bar{Z} = \frac{\bar{Z}_R\bar{Z}_L}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L}. \text{ D'où : } \bar{Z} = \frac{R \times jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}.$$

6. **c.** On ne peut pas écrire qu'un signal électrique exprimé par son expression temporelle est égal à sa représentation complexe. Les deux formes sont simplement associées. Si le signal temporel a bien une signification physique, la représentation complexe n'en a pas ; elle est juste un modèle théorique associé. L'expression a ne pose pas de problème, il s'agit d'une tension correspondant à la différence de deux signaux. L'expression b est tout à fait conforme à la représentation complexe d'un signal sinusoïdal dont le déphasage à l'origine est nul. Quand à l'expression d, il s'agit visiblement de la forme complexe d'un courant. L'amplitude complexe est bien homogène à ce qui est attendu (tension divisée par une impédance complexe).

7. **a.** Sur le schéma de la figure 2.3, on voit bien que l'annulation de la résistance transforme le dipôle en un générateur de tension parfait.

8. **d.** On a $Z = L\omega = 2 \times 10^{-3} \times 1000 = 2\ \Omega$.

9. **a.** On a : $Z = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{10^{-5} \times 10^3} = 100\ \Omega$.

10. **b.** On a : $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{6^2 + (4 \times 10^{-3})^2 (2 \times 10^3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10\ \Omega$.

11. **c.** L'amplitude du courant s'obtient facilement en considérant l'amplitude E_0 de la source et la valeur de l'impédance réelle de la bobine : $I_0 = \dfrac{E_0}{L\omega}$.

Attention, les valeurs de E_0 et de ω nous sont données indirectement :

$E_0 = E_{eff}\sqrt{2}$ et $\omega = 2\pi f$.

$$\text{Soit : } I_0 = \frac{E_{eff}\sqrt{2}}{L \times 2\pi f} = \frac{220\sqrt{2}}{50 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 50} \approx 20 \text{ A}$$

12. **a.** L'amplitude du courant s'obtient facilement en considérant l'amplitude E_0 de la source et la valeur de l'impédance réelle du dipôle : $I_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}$.

Attention, la valeur de E_0 nous est donnée indirectement : $E_0 = E_{eff}\sqrt{2}$.

Soit : $I_0 = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 + \dfrac{1}{(2 \times 10^{-3})^2 \times 300^2}}} \approx 2,7$ A

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	En régime sinusoïdal, la tension aux bornes d'une résistance et le courant qui la traverse sont toujours en phase.	☐	☐
2.	L'impédance réelle d'un dipôle linéaire s'exprime en ohms.	☐	☐
3.	L'impédance complexe d'un dipôle linéaire s'exprime en volts par ampères.	☐	☐
4.	L'avance algébrique de phase du courant qui circule dans un dipôle alimenté par une source de tension sinusoïdale est égale à l'argument de l'impédance complexe de ce dipôle.	☐	☐
5.	La réactance d'un dipôle correspond à la partie imaginaire de son impédance complexe.	☐	☐
6.	La résistance d'un dipôle correspond à son impédance réelle.	☐	☐
7.	Le modèle complexe associé à une source $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est $\bar{E} = E_{eff}e^{j\varphi}$.	☐	☐
8.	Le modèle complexe associé à une source de courant $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ est $\bar{I} = I_{eff}$.	☐	☐
9.	Lorsque la pulsation de la source qui alimente un circuit comportant des condensateurs tend vers des valeurs très élevées, les impédances des condensateurs peuvent être considérées comme très grandes et ces condensateurs peuvent être assimilés à des circuits ouverts.	☐	☐
10.	L'impédance d'une bobine est une caractéristique intrinsèque de cette bobine et donc, possède toujours la même valeur.	☐	☐
11.	La valeur efficace d'un courant dont on connaît la forme complexe est obtenue en calculant la partie réelle de cette forme complexe.	☐	☐
12.	L'avance algébrique de phase d'un signal dont on connaît la forme complexe est obtenue en calculant l'argument de cette forme complexe.	☐	☐
13.	Le principe de superposition de s'applique pas au modèle complexe d'un circuit électrique.	☐	☐
14.	L'argument d'un nombre complexe placé sous la forme d'une fraction est égal à l'argument du numérateur moins l'argument du dénominateur.	☐	☐
15.	Dans la représentation complexe d'un circuit, toute résistance possède une impédance complexe qui est un nombre réel égal à la valeur de cette résistance.	☐	☐
16.	Le théorème de Millman s'applique à la représentation complexe d'un circuit.	☐	☐

Réponses

1. **Vrai.** Soit $e(t) = E_0 \cos \omega t$ la tension aux bornes de la résistance. La loi d'Ohm nous permet d'écrire $i(t) = \dfrac{e(t)}{R} = \dfrac{E_0}{R} \cos \omega t$. Il n'y a pas de déphase entre le courant et la tension.

2. **Vrai.** Quel que soit le dipôle, son impédance réelle est homogène à une résistance.

3. **Faux.** L'impédance complexe n'a pas de signification physique. C'est une représentation théorique et par conséquent, elle n'a pas d'unité.

4. **Faux.** L'avance algébrique de phase est égale à l'opposé de l'argument de l'impédance complexe.

5. **Vrai.** C'est la définition de la réactance.

6. **Faux.** La résistance d'un dipôle correspond à la partie réelle de son impédance complexe.

7. **Vrai.** C'est la définition de la représentation complexe.

8. **Vrai.** Toujours par définition. Les nombres réels positifs sont des nombres complexes à arguments nuls.

9. **Faux.** En considérant l'expression de l'impédance réelle d'un condensateur, soit $Z = \dfrac{1}{C\omega}$, on constate que lorsque $\omega \to \infty$, $Z \to 0$. L'impédance du condensateur devient donc au contraire très faible et le condensateur peut parfois être assimilé à un court-circuit.

10. **Faux.** L'impédance d'une bobine dépend certes de son auto-inductance L qui est bien sûr constante mais aussi de la pulsation à laquelle est soumis le circuit : $Z = L\omega$.

11. **Faux.** Il faut calculer le module de la forme complexe.

12. **Vrai.** C'est bien là la définition du modèle complexe.

13. **Faux.** Toutes les lois de l'électricité étudiées dans les chapitres 1 et 2 s'appliquent à la représentation complexe d'un circuit qui reste un modèle linéaire, y compris le principe de superposition.

14. **Vrai.** Le meilleur conseil que l'on puisse donner au lecteur est de maîtriser parfaitement les règles de calculs des nombres complexes.

15. **Vrai.** Les résistances restent des résistances.

16. **Vrai.** Toutes les lois de l'électricité étudiées dans les chapitres 1 et 2 s'appliquent à la représentation complexe d'un circuit qui reste un modèle linéaire, y compris le théorème de Millman.

Entraînement

Exercices

1. Calcul d'une impédance RC série *

Calculer l'impédance complexe puis réelle des trois dipôles (a), (b) et (c) de la figure 3.8, supposés alimentés par une source de tension sinusoïdale de pulsation $\omega = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

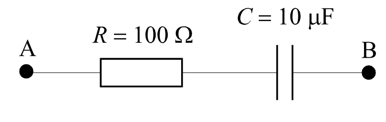


Figure 3.8

Conseil méthodologique

L'impédance complexe équivalente à une association série est égale à la somme des impédances complexes. Il convient, dans un premier temps, d'évaluer les impédances complexes de chaque dipôle élémentaire. Il est recommandé de ne faire l'application numérique qu'en fin de calcul.

2. Calcul d'une impédance RLC série *

Calculer l'impédance complexe puis réelle du dipôle de la figure 3.9, supposé alimenté par une source de tension sinusoïdale de pulsation égale à $\omega = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

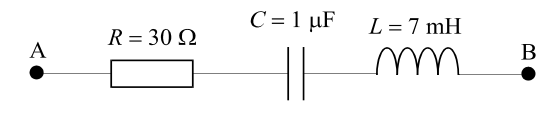


Figure 3.9

Conseil méthodologique

Mêmes conseils que pour l'exercice 3.1. Il est par ailleurs recommandé d'organiser l'expression de l'impédance complexe sous la forme d'une fraction rationnelle. Le calcul de l'impédance réelle, autrement dit du module de l'impédance complexe, s'en trouve grandement facilité. On rappelle que le module d'une fraction est égal au rapport des modules du numérateur et du dénominateur.

3. Calcul d'une impédance RLC parallèle *

Calculer l'impédance complexe puis réelle du dipôle de la figure 3.10, supposé alimenté par une source de tension sinusoïdale de pulsation égale à $\omega = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

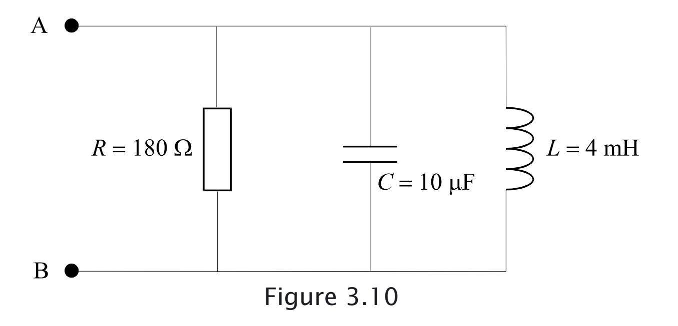


Figure 3.10

Conseil méthodologique

Les règles de calcul de l'impédance complexe d'une association parallèle sont les mêmes que pour une association de résistances en considérant, cette fois, les impédances complexes des dipôles élémentaires. Procéder toujours avec la même méthode : calcul de l'impédance complexe, mise en forme d'une fraction rationnelle, calcul de l'expression du module puis application numérique.

4. Calcul de l'impédance équivalente d'un dipôle **

Calculer l'impédance complexe puis réelle du dipôle représenté sur la figure 3.11, alimenté par une source de tension sinusoïdale de fréquence $f_0 = 50$ Hz.

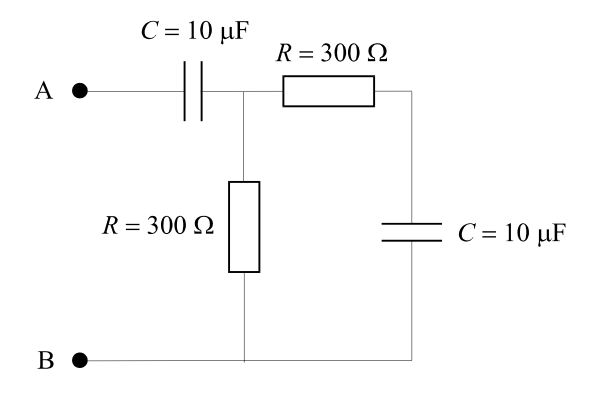


Figure 3.11

Conseil méthodologique

Dans cet exercice, nous avons affaire à une association plus complexe. Il convient, pour déterminer l'impédance complexe du dipôle, de rechercher les associations les plus simples et de progresser de proche en proche en réduisant petit à petit le circuit, comme on le fait en régime continu avec des résistances. Rappelons que les impédances complexes se manipulent comme les résistances, avec les mêmes lois générales.

5. Étude de l'influence de la pulsation de la source sur l'impédance d'un dipôle **

Calculer l'impédance complexe $\overline{Z}$ puis réelle du dipôle représenté sur la figure 3.12, alimenté par une source sinusoïdale de pulsation ω.

On posera

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

Montrer que si $\omega = \omega_1$ ou si $\omega = \omega_2$, aucun courant ne peut circuler dans le dipôle.

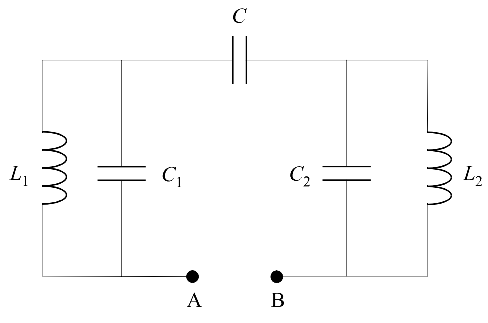


Figure 3.12

Conseil méthodologique

Après avoir déterminé l'impédance complexe du dipôle, il est conseillé de la mettre sous la forme d'une fraction rationnelle et de faire apparaître, dans l'expression, les pulsations ω_1 et ω_2.

6. Étude de l'influence de la pulsation de la source sur l'impédance d'un dipôle **

Pour quelle valeur de ω le dipôle AB de la figure 3.13 possède-t-il une impédance complexe réelle ?

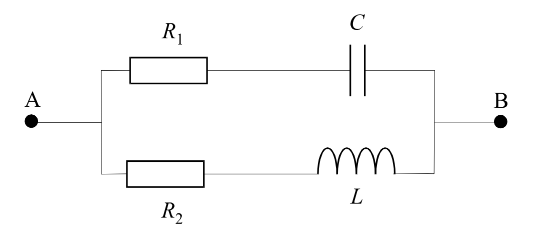


Figure 3.13

Conseil méthodologique

La résolution de cet exercice passe bien sûr par le calcul de l'expression de l'impédance équivalente du dipôle. On doit ensuite rechercher les conditions pour que cette expression soit réelle. Un raisonnement sur les arguments s'avérera plus intéressant qu'un raisonnement sur la partie imaginaire.

7. Étude de l'influence de la pulsation de la source sur l'impédance d'un dipôle **

Déterminer l'impédance complexe $\overline{Z}$ du dipôle AB de la figure 3.14.

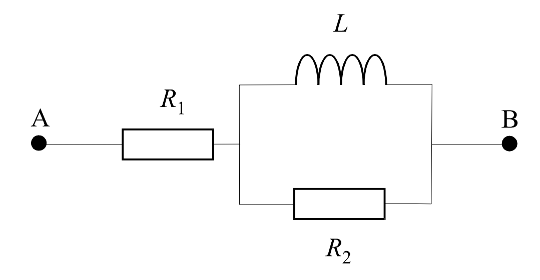


Figure 3.14

Calculer les valeurs limites de cette impédance $\overline{Z}$ lorsque $\omega \to 0$ et lorsque $\omega \to +\infty$. Montrer que l'impédance réelle Z est une fonction croissante de ω.

Conseil méthodologique

Le calcul de l'impédance complexe du dipôle ne pose pas de difficulté particulière. On cherchera dans un premier temps les valeurs limites de son expression puis on dérivera l'expression du module par rapport à ω pour en étudier le sens de variation.

8. Calcul d'une tension sinusoïdale dans un circuit *

Dans le circuit de la figure 3.15, déterminer l'expression de $u(t)$.

On donne : $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos \omega t$

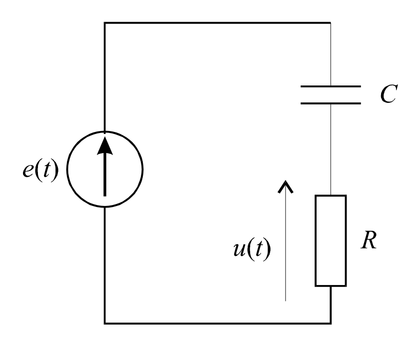


Figure 3.15

Conseil méthodologique

C'est bien une expression temporelle que l'on recherche ici mais il faut, dans un premier temps, transposer le problème dans sa représentation complexe et identifier l'expression de $\overline{U}$, représentation complexe de $u(t)$. Le principe du pont diviseur de tension s'applique au modèle complexe.

9. Courants en quadrature de phase **

On considère le montage de la figure 3.16. La source de tension parfaite est sinusoïdale : $\overline{E} = E_{eff}$. Établir la condition pour laquelle les deux courants i_1 et i_2 sont en quadrature de phase, quelle que soit la pulsation ω.

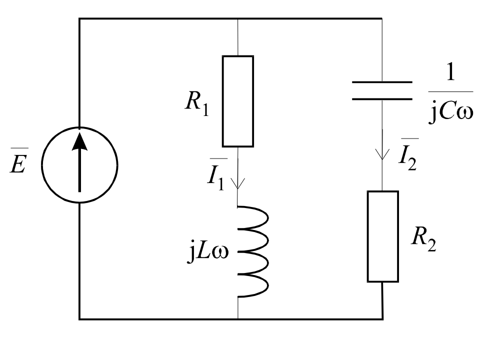


Figure 3.16

Conseil méthodologique

Le problème est posé directement en représentation complexe comme cela est souvent le cas en régime sinusoïdal, ce qui témoigne de l'assimilation très courante du schéma électrique réel avec son modèle complexe. Ici, on se contentera de rechercher les représentations complexes des deux courants et de raisonner sur leurs arguments.

10. Théorème de Millman en régime sinusoïdal **

Dans le montage de la figure 3.17, déterminer $v_A(t)$, le potentiel au point A. La source de tension parfaite est sinusoïdale : $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$.

A.N. : $E_{eff} = 18$ V, $\omega = 600\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $R = 4\,\Omega$, $C = 200\,\mu\text{F}$, $L = 10\,\text{mH}$

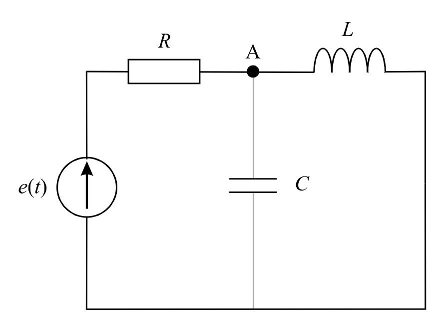


Figure 3.17

Conseil méthodologique

Le théorème de Millman s'applique à la représentation complexe du circuit. Ne pas oublier d'exprimer le résultat réel temporel en ayant pris soin de calculer sa valeur efficace et son déphasage à partir de l'expression complexe.

11. Théorème de Millman en régime sinusoïdal ***

Déterminer l'expression du courant $i(t)$ circulant dans la résistance R dans le circuit représenté sur la figure 3.18. On utilisera le théorème de Millman afin de déterminer, dans un premier temps, la différence de potentiels aux bornes de cette résistance.

On donne : $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$.

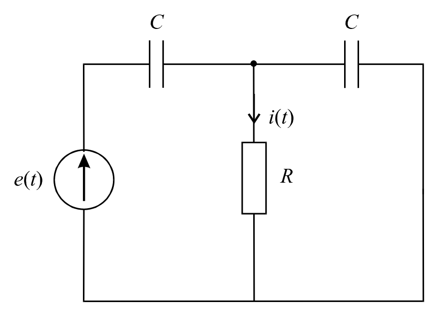


Figure 3.18

Conseil méthodologique

La méthode de résolution est explicitée dans l'énoncé. Il y a un lien direct entre la tension aux bornes de la résistance et le courant qui la traverse. C'est donc bien le théorème de Millman qu'il faut invoquer pour en déduire le courant. On prendra soin de procéder méthodiquement

en transposant le problème dans sa représentation complexe, comme à l'accoutumée, puis en extrayant du résultat complexe, les paramètres (valeur efficace et déphasage) du résultat réel.

12. Théorème de Thévenin en régime sinusoïdal ***

On considère le circuit représenté sur la figure 3.19. Déterminer l'expression du courant $i(t)$ dans la résistance R. On donne $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$.

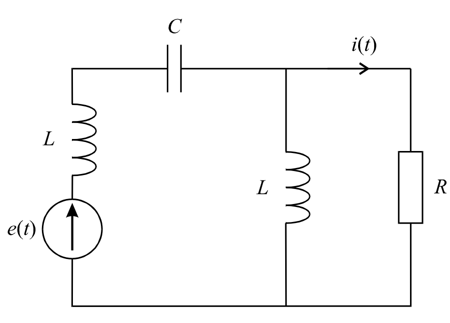


Figure 3.19

Conseil méthodologique

En considérant que la résistance R est alimentée par le dipôle AB, il s'agit ici de rechercher le générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle. Cette recherche se fait en représentation complexe en effectuant par exemple, des transformations successives, comme nous y sommes habitués en régime continu avec des résistances. Les calculs sont un peu plus complexes mais ils ne posent pas de réelle difficulté.

13. Calcul d'un courant de charge ***

Dans le circuit représenté sur la figure 3.20, déterminer le courant $i(t)$ dans la résistance R_1. On donne : $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ avec $\omega = 300\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $E_{eff} = 10\ \text{V}$

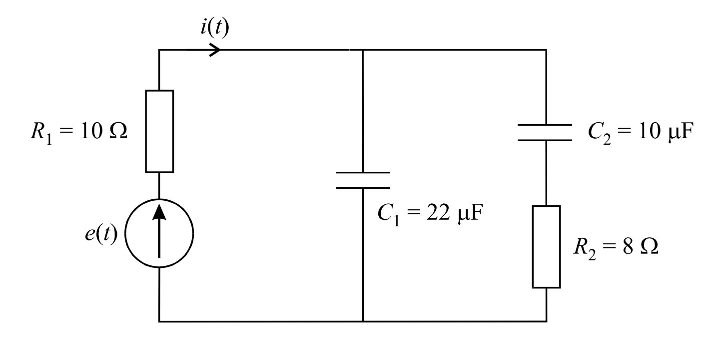


Figure 3.20

Conseil méthodologique

Le problème étant transposé dans sa représentation complexe, on cherchera, dans un premier temps, l'impédance complexe équivalente à l'association C_1, C_2, R_2.

14. Phénomène de résonance **

a. Dans le circuit représenté sur la figure 3.21, déterminer l'impédance complexe du dipôle AB alimenté par le générateur parfait $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos \omega t$.

b. Calculer l'impédance réelle du dipôle.
A.N. : $R = 10$ kΩ, $C = 1\,\mu$F, $L = 2$ mH

c. Pour quelle valeur ω_0 de ω le courant i possède-t-il une amplitude maximale ? Pour cette même valeur, quelle est la valeur du déphasage entre ce courant et la tension $e(t)$?

Conseil méthodologique

Il est conseillé d'exprimer l'impédance réelle sous une forme permettant de visualiser immédiatement la condition recherchée sur ω.

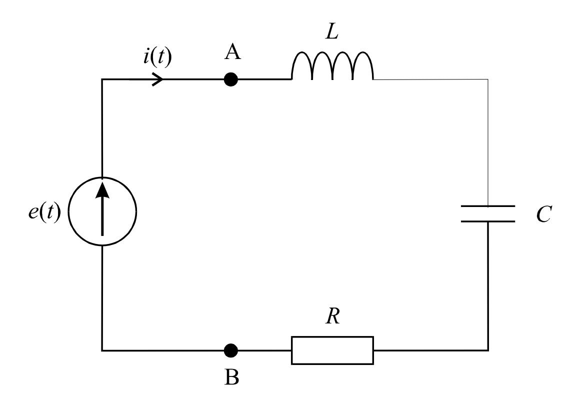


Figure 3.21

15. Détermination d'une différence de potentiel en régime sinusoïdal **

a. Dans le circuit de la figure 3.22, calculer la forme complexe de la tension $v_A - v_B$.

b. Montrer que la valeur efficace de la tension $v_A - v_B$ est égale à la valeur efficace de la source d'alimentation du circuit.

c. Calculer la pulsation ω_0 pour laquelle la tension $v_A - v_B$ est en quadrature de phase par rapport à $e(t)$. On prend $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos \omega t$.

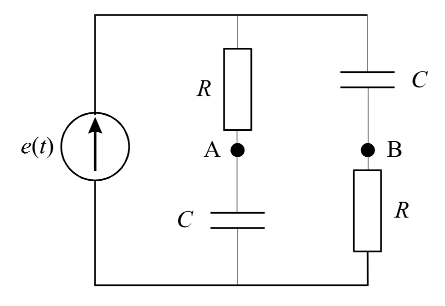


Figure 3.22

Conseil méthodologique

Une fois le problème transposé en représentation complexe, on cherchera successivement les formes complexes respectives de v_A et v_B en utilisant le principe du diviseur de tension.

16. Gain et déphasage ***

On considère le montage de la figure 3.23.

a. Déterminer le module $|H(\omega)|$ de la fonction $H(\omega)$ définie par :

$$H(\omega) = \frac{\overline{U}}{\overline{E}}$$

b. Déterminer la valeur ω_0 de ω pour laquelle ce module $|H(\omega)|$ est égal à $\frac{1}{3}$.

c. Calculer le déphasage φ entre $\overline{U}$ et $\overline{E}$ pour cette pulsation ω_0. On considérera que φ est l'avance algébrique de phase de $\overline{U}$ par rapport à $\overline{E}$.

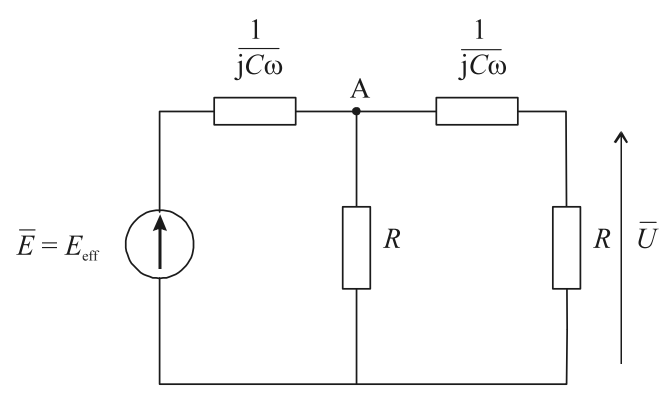


Figure 3.23

Conseil méthodologique

La détermination de $\overline{U}$ est cruciale pour résoudre le problème. Il convient, pour déterminer cette tension, de déterminer préalablement le courant $\overline{I}$ dans la résistance R, puis la tension $\overline{V}_A$ au point A.

17. Étude d'un pont d'impédances ***

Le montage de la figure 3.24 représente un pont d'impédances alimenté par un générateur parfait de tension sinusoïdale : $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$.

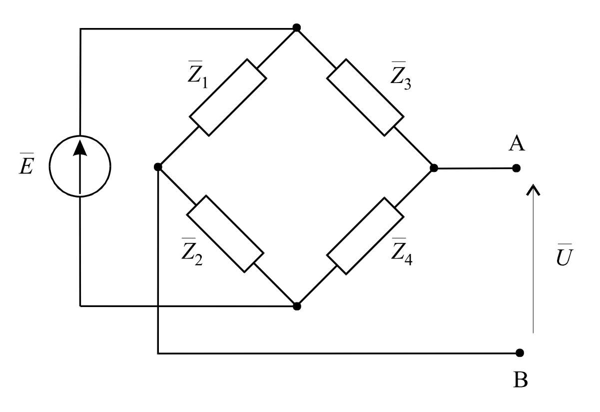


Figure 3.24

a. Déterminer le générateur de Thévenin équivalent au dipôle AB.

b. En déduire la condition dite d'équilibre du pont pour que $\overline{U} = 0$.

c. $\overline{Z}_1$ est formé de l'association en série d'une résistance R_1 et d'un condensateur C_1. $\overline{Z}_2$ est formé de l'association en parallèle d'une résistance R_2 et d'un condensateur C_2. Les deux autres impédances sont des résistances pures : $\overline{Z}_3 = R_3$ et $\overline{Z}_4 = R_4$.

Déterminer la pulsation de la source de tension qui assure l'équilibre du pont. Montrer que cet équilibre ne peut être atteint que pour une certaine valeur de C_2 que l'on déterminera.

A.N. : $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 470\,\Omega$, $R_3 = 810\,\Omega$, $R_4 = 220\,\Omega$, $C_1 = 47\,\mu\text{F}$

Conseil méthodologique

Pour déterminer le générateur équivalent de Thévenin, on procédera classiquement en recherchant l'impédance équivalente puis la tension à vide. En ce qui concerne la recherche de l'équilibre et l'étude du cas particulier, on procède aux calculs dans la représentation complexe comme on le ferait avec des résistances en régime continu.

18. Circuit électrique en surtension ***

La figure 3.25 représente un montage dit de Boucherot possédant, lorsqu'il est alimenté par une source de pulsation appropriée, une propriété très intéressante et relativement étonnante que nous découvrirons à la fin du problème.

a. Calculer la pulsation de résonance ω pour laquelle la valeur efficace du courant dans la résistance R est maximale.

b. Calculer l'expression du rapport $Q = \dfrac{|\overline{U}|}{E_{eff}}$ pour cette pulsation.

c. Calculer la valeur efficace du courant circulant dans la résistance R pour cette même pulsation.

A.N. : $E_{eff} = 10\,\text{V}$, $C = 8{,}2\,\mu\text{F}$, $L = 7\,\text{mH}$, $R = 1\,500\,\Omega$

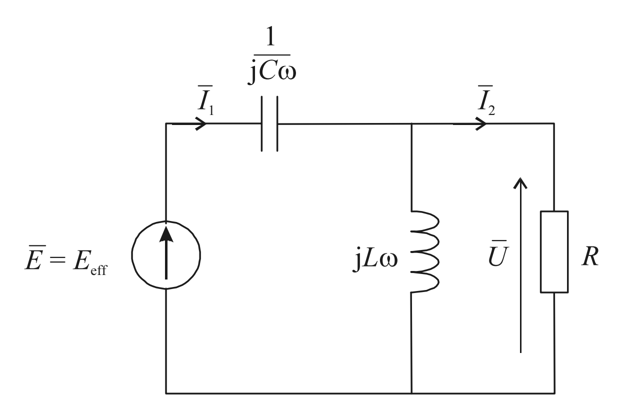


Figure 3.25

Conseil méthodologique

Le courant dans la résistance est maximal lorsque la tension à ses bornes l'est aussi. Il est donc nécessaire, dans un premier temps, de calculer la tension $\overline{U}$. On placera cette expression sous la forme d'une fraction et on cherchera les conditions pour lesquelles son dénominateur est minimal.

Réponses

1. Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe du dipôle et $Z = \left|\overline{Z}\right|$ son impédance réelle, c'est-à-dire son module.

Appliquons le modèle complexe au dipôle AB (figure 3.26).

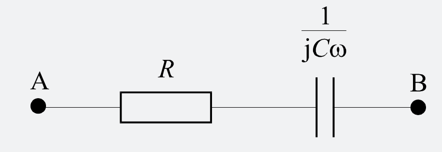


Figure 3.26

S'agissant de l'association série de deux impédances complexes, on tire :

$$\overline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

D'où l'on tire Z en calculant le module :

$$Z = \left|\frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}\right| = \frac{|1 + jRC\omega|}{|jC\omega|} = \frac{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}{C\omega}$$

A.N. :

$$Z = \frac{\sqrt{1 + (100)^2 \times (10^{-5})^2 \times (500)^2}}{10^{-5} \times 500} = 223{,}6\,\Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On manipule les impédances complexes des dipôles avec la même simplicité que pour le cas des résistances en régime continu. On tirera avantage de bien maîtriser les calculs sur les nombres complexes pour réussir à résoudre ce type d'exercice.

2. Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe du dipôle et $Z = \left|\overline{Z}\right|$ son impédance réelle, c'est-à-dire son module. Appliquons le modèle complexe au dipôle AB (figure 3.27).

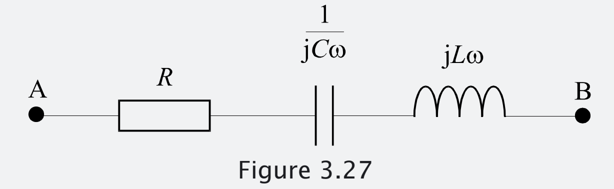


Figure 3.27

Calculons l'impédance de cette association série :

$$\overline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega = \frac{1 + jRC\omega - LC\omega^2}{jC\omega} = \frac{(1 - LC\omega^2) + j(RC\omega)}{jC\omega}$$

Calculons Z, module de cette expression :

$$Z = \left|\frac{(1 - LC\omega^2) + j(RC\omega)}{jC\omega}\right| = \frac{\left|(1 - LC\omega^2) + j(RC\omega)\right|}{|jC\omega|}$$

$$Z = \frac{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}{C\omega}$$

Nous pouvons simplifier cette expression :

$$Z = \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2}{(C\omega)^2} + \frac{(RC\omega)^2}{(C\omega)^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

Application numérique :

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{10^{-6} \times 500} - 7 \times 10^{-3} \times 500\right)^2 + 30^2}$$

$$Z \approx 2\,000\,\Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il n'est pas du tout nécessaire d'exprimer l'impédance complexe sous sa forme partie réelle et partie imaginaire. Au contraire : la réduction au même dénominateur permet de calculer facilement le module en calculant le module du numérateur et celui du dénominateur. Ne pas oublier que le module d'un quotient est égal au module du numérateur divisé par le module du dénominateur.

3. Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe du dipôle et $Z = \left|\overline{Z}\right|$ son impédance réelle, c'est-à-dire son module.
Appliquons le modèle complexe (figure 3.28).

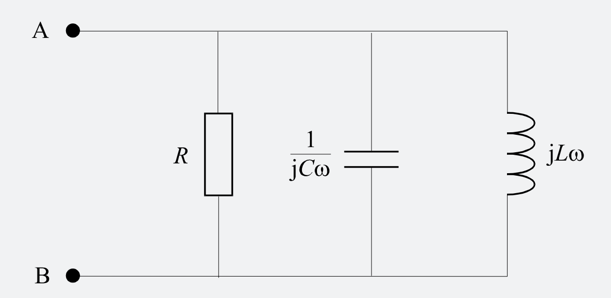


Figure 3.28

Les trois impédances sont en parallèle. On a donc :

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{jL\omega - RLC\omega^2 + R}{jRL\omega} = \frac{(R - RLC\omega^2) + j(L\omega)}{jRL\omega}$$

D'où :

$$\overline{Z} = \frac{jRL\omega}{(R - RLC\omega^2) + j(L\omega)}$$

Calculons Z, module de cette expression :

$$Z = \frac{|jRL\omega|}{\left|(R - RLC\omega^2) + j(L\omega)\right|} = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$$

Application numérique :

$$Z = \frac{180 \times 4 \times 10^{-3} \times 500}{\sqrt{180^2 \times [1 - (4 \times 10^{-3} \times 10^{-5} \times (500)^2)]^2 + [4 \times 10^{-3} \times 500]^2}}$$

$$Z = 2\,\Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Pour calculer l'impédance équivalente d'une association parallèle, on somme les inverses des impédances complexes. Il convient d'être vigilant dans les calculs pour ne pas introduire d'erreur.

4. Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe du dipôle et Z son module qui représente l'impédance réelle. Construisons le modèle complexe de ce schéma (figure 3.29).

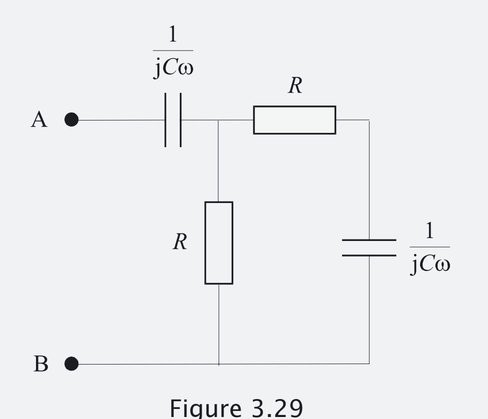


Figure 3.29

Nous remarquons immédiatement la présence d'une association série de R et de $\frac{1}{jC\omega}$, qui forme une impédance équivalente que nous appellerons $\overline{Z}_0$ (voir figure 3.30) :

$$\overline{Z}_0 = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

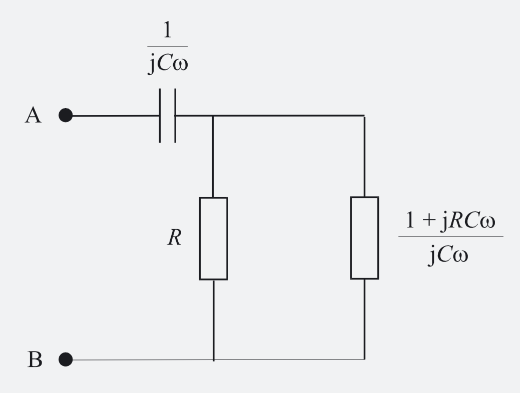


Figure 3.30

$\overline{Z}_0$ se trouve en parallèle avec R. Cette association forme une impédance équivalente $\overline{Z}_1$ telle que :

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\overline{Z}_0} = \frac{1}{R} + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1 + 2jRC\omega}{R(1 + jRC\omega)}$$

Soit :

$$\overline{Z}_1 = \frac{R(1 + jRC\omega)}{1 + 2jRC\omega}$$

Le dipôle AB devient équivalent à celui proposé sur la figure 3.31. L'impédance complexe $\overline{Z}$ recherchée n'est autre que l'impédance équivalente à l'association série de $\overline{Z}_1$ et de $\frac{1}{jC\omega}$.

Cette impédance se calcule donc aisément :

$$\overline{Z} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{R(1 + jRC\omega)}{1 + 2jRC\omega} = \frac{1 + 2jRC\omega + jRC\omega(1 + jRC\omega)}{jC\omega(1 + 2jRC\omega)}$$

Soit :

$$\overline{Z} = \frac{(1 - R^2C^2\omega^2) + 3jRC\omega}{-2RC^2\omega^2 + jC\omega}$$

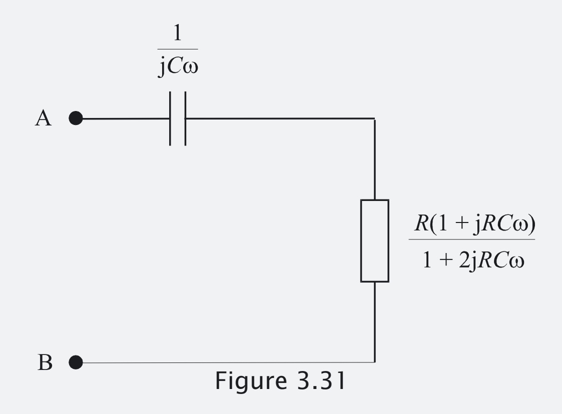


Figure 3.31

Comme pour l'exercice 3.1, nous nous contenterons de cette expression dans laquelle le numérateur et le dénominateur apparaissent sous forme partie réelle et partie imaginaire, puisque le calcul du module se fait simplement à partir d'une telle expression.

Calculons $Z = |\overline{Z}|$.

$$Z = \frac{|(1 - R^2C^2\omega^2) + 3jRC\omega|}{|-2RC^2\omega^2 + jC\omega|} = \frac{\sqrt{(1 - R^2C^2\omega^2)^2 + 9R^2C^2\omega^2}}{\sqrt{4R^2C^4\omega^4 + C^2\omega^2}}$$

Application numérique :

$$Z = \frac{\sqrt{[1 - (300^2 \times 10^{-10} \times \omega^2)]^2 + [9 \times 300^2 \times 10^{-10} \times \omega^2]}}{\sqrt{[4 \times 300^2 \times 10^{-20} \times \omega^4] + [10^{-10} \times \omega^2]}}$$

avec : $$\omega = 2\pi \times 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Z = 422\,\Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On remarquera dans cet exercice, que le calcul des impédances complexes équivalentes s'exécute de la même manière que celui des résistances équivalentes en régime continu : il s'agit de raisonner par associations successives de dipôles simples. Même si ces associations correspondent à des impédances complexes et dès lors que l'on procède avec soin, le calcul ne présente guère plus de difficulté.

5. Calculons l'impédance complexe $\overline{Z}_1$ équivalente à l'association parallèle de $L1$ et de $C1$:

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{jL_1\omega} + jC_1\omega = \frac{1 - L_1C_1\omega^2}{jL_1\omega} \Rightarrow \overline{Z}_1 = \frac{jL_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} = \frac{jL_1\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}$$

De même l'association parallèle de $L2$ et $C2$ forme une impédance complexe équivalente $\overline{Z}_2$ que l'on obtient en changeant uniquement les indices :

$$\overline{Z}_2 = \frac{jL_2\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}$$

Le dipôle AB est donc équivalent au dipôle représenté sur la figure 3.32, c'est-à-dire à l'association série de $\overline{Z}_1$, $\frac{1}{jC\omega}$ et $\overline{Z}_2$.

D'où : $$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \frac{1}{jC\omega} + \overline{Z}_2$$

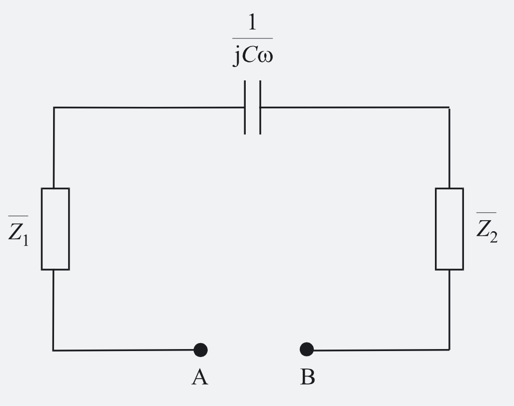


Figure 3.32

Remplaçons $\overline{Z}_1$ et $\overline{Z}_2$ par leurs expressions :

$$\overline{Z} = \frac{jL_1\omega}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}} + \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL_2\omega}{1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}}$$

$$Z = \left|\overline{Z}\right| = \frac{-L_1C\omega^2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) + \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - L_2C\omega^2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}{jC\omega\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)}$$

Cette expression permet de vérifier que :

$$\omega \to \omega_1 \Rightarrow \left|\overline{Z}\right| \to +\infty$$
$$\omega \to \omega_2 \Rightarrow \left|\overline{Z}\right| \to +\infty$$

Dans les deux cas, l'impédance réelle du dipôle tend vers $+\infty$: aucun courant ne peut donc circuler dans le dipôle AB.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Même si les expressions peuvent paraître lourdes, ne pas hésiter à placer les expressions sous la forme de fractions, en les organisant en fonction des puissances de ω. Dans cet exercice, on mesurera l'intérêt d'introduire des pulsations particulières ω_1 et ω_1 dépendant des paramètres électriques du montage.

6. Le dipôle AB est formé de deux dipôles associés en parallèle d'impédances complexes respectives $\overline{Z}_1$ et $\overline{Z}_2$ (figure 3.33). Connaissant ces deux impédances, nous accéderons facilement à l'impédance du dipôle.

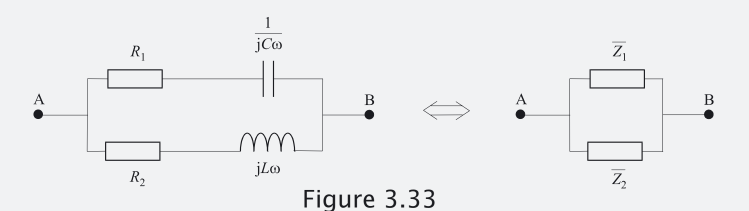


Figure 3.33

Avec :
$$\begin{cases} \overline{Z}_1 = R_1 + \dfrac{1}{jC\omega} \\ \overline{Z}_2 = R_2 + jL\omega \end{cases}$$

Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe du dipôle AB, on a :

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{R_1 + \dfrac{1}{jC\omega}} + \frac{1}{R_2 + jL\omega} = \frac{R_2 + jL\omega + R_1 + \dfrac{1}{jC\omega}}{\left(R_1 + \dfrac{1}{jC\omega}\right)(R_2 + jL\omega)}$$

D'où :
$$\overline{Z} = \frac{\left(R_1 + \dfrac{1}{jC\omega}\right)(R_2 + jL\omega)}{R_2 + R_1 + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Nous cherchons la condition sur ω pour que cette impédance soit réelle. Si tel est le cas, l'argument du numérateur doit être égal à l'argument du dénominateur. Afin de calculer facilement ces deux arguments, nous préférerons exprimer le numérateur et le dénominateur sous forme partie réelle et partie imaginaire. Pour le dénominateur, c'est déjà chose faite. Développons donc le numérateur :

$$\overline{Z} = \frac{\left(R_1 R_2 + \dfrac{L}{C}\right) + j\left(-\dfrac{R_2}{C\omega} + R_1 L\omega\right)}{(R_2 + R_1) + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Soit φ_1 l'argument du numérateur et φ_2 l'argument du dénominateur :

$$\tan\varphi_1 = \frac{-\dfrac{R_2}{C\omega} + R_1 L\omega}{R_1 R_2 + \dfrac{L}{C}}$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R_2 + R_1}$$

φ_1 et φ_2 étant compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \iff \tan\varphi_1 = \tan\varphi_2$$

L'impédance $\overline{Z}$ sera donc réelle si et seulement si :

$$\frac{-\dfrac{R_2}{C\omega} + R_1 L\omega}{R_1 R_2 + \dfrac{L}{C}} = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R_2 + R_1}$$

Multiplions chaque membre de cette équation par $C\omega$:

$$\frac{-R_2 + R_1 LC\omega^2}{R_1 R_2 + \dfrac{L}{C}} = \frac{LC\omega^2 - 1}{R_2 + R_1}$$

$$\left(-R_2 + R_1 LC\omega^2\right)(R_2 + R_1) = \left(LC\omega^2 - 1\right)\left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right)$$

Développons les deux membres :

$$-R_2^2 + R_1R_2LC\omega^2 - R_2R_1 + R_1^2LC\omega^2 = R_1R_2LC\omega^2 - R_1R_2 + L^2\omega^2 - \frac{L}{C}$$

Après simplifications, il reste :

$$-R_2^2 + R_1^2LC\omega^2 = L^2\omega^2 - \frac{L}{C}$$

$$\omega^2\left(L^2 - R_1^2LC\right) = -R_2^2 + \frac{L}{C}$$

D'où :
$$\omega^2 = \frac{\frac{L}{C} - R_2^2}{L^2 - R_1^2LC}$$

Si on a à la fois $L^2 - R_1^2LC > 0$ et $\frac{L}{C} - R_2^2 > 0$, ou si l'on a à la fois $L^2 - R_1^2LC < 0$ et $\frac{L}{C} - R_2^2 < 0$, cette équation possède une solution positive qui est la pulsation recherchée :

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_2^2}{L^2 - R_1^2LC}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Deux enseignements peuvent être tirés de cet exercice. Le premier concerne l'intérêt de placer les résultats sous la forme de fractions. Le second montre qu'il est toujours préférable de raisonner sur les arguments pour déterminer les conditions pour qu'une impédance complexe soit réelle. On se souviendra en particulier que l'argument d'un rapport est égal à la différence des arguments.

7. Sur le schéma de la figure 3.34 représentant le modèle complexe du dipôle, on lit :

$$\overline{Z} = R_1 + \frac{jL\omega \cdot R_2}{jL\omega + R_2}$$

où $\frac{jL\omega \cdot R_2}{jL\omega + R_2}$ représente l'impédance complexe équivalente de l'association parallèle de L et de R_2.

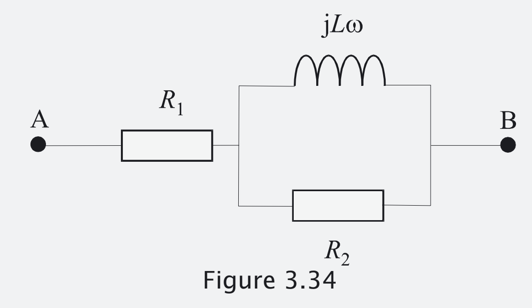


Figure 3.34

Lorsque $\omega \to 0$, $\overline{Z} = R_1 + \frac{jL\omega \cdot R_2}{jL\omega + R_2}$ tend vers R_1.

Lorsque $\omega \to +\infty$, la fraction rationnelle $\frac{jLR_2\omega}{jL\omega + R_2}$ tend vers le rapport des deux termes de plus haut degré en ω. On a donc :

$$\lim_{\omega \to +\infty} \overline{Z} = R_1 + \frac{jLR_2}{jL\omega} = R_1 + R_2$$

Dans les deux cas limites, l'impédance complexe $\overline{Z}$ tend vers une valeur réelle.
Calculons à présent le module de $\overline{Z}$:

$$Z = \left|\overline{Z}\right| = \left|R_1 + \frac{jLR_2\omega}{jL\omega + R_2}\right| = \left|\frac{R_1(jL\omega + R_2) + jLR_2\omega}{jL\omega + R_2}\right|$$

$$Z = \left|\frac{R_1R_2 + jL(R_2 + R_1)\omega}{R_2 + jL\omega}\right| = \sqrt{\frac{(R_1R_2)^2 + L^2(R_1 + R_2)^2\omega^2}{R_2^2 + L^2\omega^2}}$$

Posons : $$A(\omega) = \frac{(R_1R_2)^2 + L^2(R_1 + R_2)^2\omega^2}{R_2^2 + L^2\omega^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2L^2(R_1 + R_2)^2\omega \cdot \left(R_2^2 + L^2\omega^2\right) - 2L^2\omega\left((R_1R_2)^2 + L^2(R_1 + R_2)^2\omega^2\right)}{\left(R_2^2 + L^2\omega^2\right)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2L^2R_2^2(R_1 + R_2)^2\omega - 2L^2(R_1R_2)^2\omega}{\left(R_2^2 + L^2\omega^2\right)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2L^2R_2^2\omega\left((R_1 + R_2)^2 - R_1^2\right)}{\left(R_2^2 + L^2\omega^2\right)^2} = \frac{2L^2R_2^2\omega\left(2R_1R_2 + R_2^2\right)}{\left(R_2^2 + L^2\omega^2\right)^2}$$

Il est clair que quel que soit ω, $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} > 0$, donc que Z est strictement croissant en fonction de ω.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On est parfois amené, pour résoudre les problèmes d'électricité en régime sinusoïdal, à étudier analytiquement des fonctions parfois complexes (dans les deux sens du terme) de la pulsation. Cet exercice montre par ailleurs l'influence importante de la pulsation sur les expressions des impédances et donc, sur le comportement des circuits.

8. Appliquons le modèle complexe à notre circuit alimenté en régime sinusoïdal (figure 3.35).

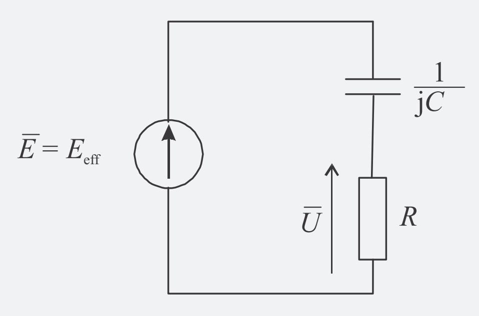


Figure 3.35

Utilisons le principe du diviseur de tension (voir exercice 1.11) qui s'applique (comme toutes les lois de l'électricité en régime continu) au modèle complexe de notre circuit :

$$\overline{U} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}\overline{E} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}E_{eff}$$

Nous savons déjà que la tension $u(t)$ est sinusoïdale de même pulsation que $e(t)$ puisque le circuit est linéaire. Il nous faut donc trouver sa valeur efficace et son éventuel déphasage par rapport à e.

Posons a priori : $$\overline{U} = U_{eff}e^{j\varphi}$$

Il est clair que dans l'équation précédente, qui s'écrit désormais :

$$U_{eff}e^{j\varphi} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}E_{eff}$$

la connaissance du module et de l'argument de l'expression $\frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}$ nous donnera accès à U_{eff} et à φ :

$$\left|\frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}\right| = \frac{|jRC\omega|}{|jRC\omega + 1|} = \frac{RC\omega}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + 1}}$$

$$\arg\left(\frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1}\right) = \arg(jRC\omega) - \arg(jRC\omega + 1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$$

De même qu'il ne faut jamais oublier que le module d'un quotient est égal au quotient des modules, il faut également se souvenir que l'argument d'un quotient est égal à la différence entre l'argument du numérateur et celui du dénominateur.

Le lecteur devra également se souvenir des propriétés suivantes :

$$\arg(a + \mathrm{j}b) = \arctan\frac{b}{a} \text{ pour } a > 0$$

$$\arg(a + \mathrm{j}b) = \arctan\frac{b}{a} \pm \pi \text{ pour } a < 0$$

Ce sont ces propriétés qui sont couramment utilisées pour calculer modules et arguments de nombres complexes en électrocinétique.

On obtient alors :

$$U_{eff}e^{j\varphi} = \frac{RC\omega}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + 1}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)\right)} E_{eff}$$

En identifiant modules et arguments des deux membres de cette équation, on obtient :

$$\begin{cases} U_{eff} = E_{eff}\dfrac{RC\omega}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + 1}} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega) \end{cases}$$

soit en écrivant la forme réelle du modèle complexe ainsi trouvé :

$$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

Nous obtenons finalement l'expression de la tension recherchée en remplaçant chacune des inconnues par son expression :

$$u(t) = E_{eff}\sqrt{2}\frac{RC\omega}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + 1}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)\right)$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : À ce stade, le lecteur sera convaincu qu'il est fondamental de maîtriser les calculs trigonométriques. Par ailleurs, cet exercice type montre d'une part qu'il est facile d'utiliser les théorèmes de l'électricité en les appliquant au modèle complexe (ici, le principe du pont diviseur de tension) et d'autre part comment il faut s'y prendre pour déterminer le résultat réel temporel à partir du modèle complexe.

9. Le courant $\overline{I}_1$ est dû à la présence de la tension $\overline{E}$ aux bornes de l'association série $R_1 + jL\omega$.

On a donc :

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{E}}{R_1 + jL\omega}$$

De même :

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{E}}{R_2 - \dfrac{j}{C\omega}}$$

Comme les deux courants doivent être en quadrature de phase, on doit avoir :

$$\arg(\overline{I}_1) - \arg(\overline{I}_2) = \pm\frac{\pi}{2}$$

D'où : $$\arg\left(\frac{\overline{E}}{R_1 + jL\omega}\right) - \arg\left(\frac{\overline{E}}{R_2 - \dfrac{j}{C\omega}}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Soit, en développant et compte tenu du fait que $\arg\left(\overline{E}\right) = \arg\left(E_{eff}\right) = 0$:

$$0 - \arg(R_1 + jL\omega) - 0 + \arg\left(R_2 - \frac{j}{C\omega}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Ce qui donne : $$-\arg(R_1 + jL\omega) + \arg\left(R_2 - \frac{j}{C\omega}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Compte tenu que nos grandeurs physiques sont toutes positives, l'argument de $R_1 + jL\omega$ est positif, tandis que l'argument de $R_2 - \dfrac{j}{C\omega}$ est négatif. En conséquence, on doit avoir :

$$-\arg(R_1 + jL\omega) + \arg\left(R_2 - \frac{j}{C\omega}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

D'où : $$\arctan\left(\frac{L\omega}{R_1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{R_2C\omega}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Appliquons à cette expression la formule de trigonométrie bien connue :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

On obtient :

$$\tan\left[\arctan\left(\frac{L\omega}{R_1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{R_2C\omega}\right)\right] = \frac{\dfrac{L\omega}{R_1} + \dfrac{1}{R_2C\omega}}{1 - \dfrac{L\omega}{R_1} \cdot \dfrac{1}{R_2C\omega}}$$

Cette expression doit tendre vers $+\infty$ puisque :

$$\arctan\left(\frac{L\omega}{R_1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{R_2C\omega}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Son inverse doit donc être nul :

$$\frac{1 - \dfrac{L\omega}{R_1} \cdot \dfrac{1}{R_2C\omega}}{\dfrac{L\omega}{R_1} + \dfrac{1}{R_2C\omega}} = 0$$

D'où : $$\frac{L}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2C} = 1 \quad \Rightarrow \quad R_1R_2 = \frac{L}{C}$$

qui est bien une condition indépendante de ω. Si cette condition est établie, les deux courants i_1 et i_2 seront donc en quadrature de phase quelle que soit la valeur de la pulsation ω.

La maîtrise des calculs dans les problèmes d'électrocinétique en régime sinusoïdal passe très souvent par une bonne connaissance des formules de trigonométrie. Nous ne pouvons que conseiller au lecteur de réviser ces notions.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Nul besoin ici de calculer les formes temporelles des deux tensions pour trouver les conditions de quadrature de phase. Les informations de déphasage sont en effet contenues dans les arguments des représentations complexes.

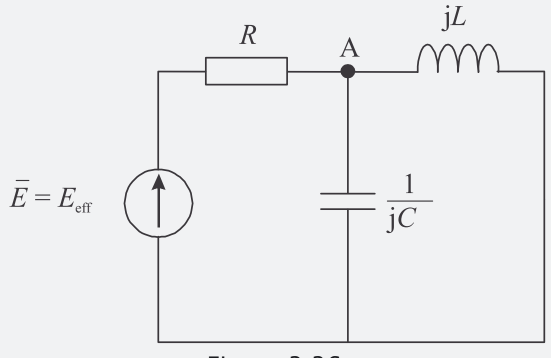


Figure 3.36

10. Transposons le problème au modèle complexe (figure 3.36) et appliquons le théorème de Millman au point A.

Le théorème de Millman s'applique en effet au modèle complexe en considérant que l'on calcule $\overline{V}_A$. On obtient ainsi :

$$\overline{V}_A = \frac{\dfrac{\overline{E}}{R} + jC\omega \cdot 0 + \dfrac{0}{jL\omega}}{\dfrac{1}{R} + jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega}}$$

Soit encore :

$$\overline{V}_A = \frac{E_{eff}}{1 + jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}$$

Nous savons que la tension $v_A(t)$ est sinusoïdale de même pulsation que la tension $e(t)$. Autrement dit, posons :

$$v_A(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

Soit, en modèle complexe :

$$\overline{V}_A = V_{eff}e^{j\varphi}$$

Procédons par identification :

$$\frac{E_{eff}}{1 + jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)} = V_{eff}e^{j\varphi}$$

Le nombre complexe $V_{eff}e^{j\varphi}$ a pour module V_{eff} et pour argument φ. Identifions dans cette dernière équation les modules et les arguments des deux membres. Il vient d'une part :

$$V_{eff} = \left|\frac{E_{eff}}{1 + jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\right| = \frac{E_{eff}}{\left|1 + jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)\right|}$$

$$V_{eff} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

D'autre part, on a :

$$\varphi = \arg\left[\frac{E_{eff}}{1 + jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\right] = 0 - \arg\left[1 + jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)\right]$$

Soit : $$\varphi = -\arctan\left[R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]$$

D'où l'expression de $v_A(t)$:

$$v_A(t) = \frac{E_{eff}\sqrt{2}}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left[R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]\right)$$

Application numérique :

$$V_{eff} = \frac{18}{\sqrt{1 + 4^2 \times \left(200 \times 10^{-6} \times 600 - \frac{1}{10 \times 10^{-3} \times 600}\right)^2}} = 17{,}7 \text{ V}$$

$$\varphi = -\arctan\left(4 \times \left[200 \times 10^{-6} \times 600 - \frac{1}{10 \times 10^{-3} \times 600}\right]\right) = 10{,}6^\circ$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Pour déterminer la forme temporelle d'une grandeur électrique, il convient de rechercher sa valeur efficace et son déphasage par rapport à la source. Ces deux paramètres s'obtiennent toujours en calculant le module et l'argument de sa représentation complexe. On appréciera ici, la facilité avec laquelle le théorème de Millman s'applique au modèle complexe.

11. Transposons ce circuit au modèle complexe et appliquons le théorème de Millman au point A (figure 3.37). La connaissance de la tension au point A nous conduira à l'expression de $i(t)$ puisque :

$$i(t) = \frac{v_A(t)}{R}$$

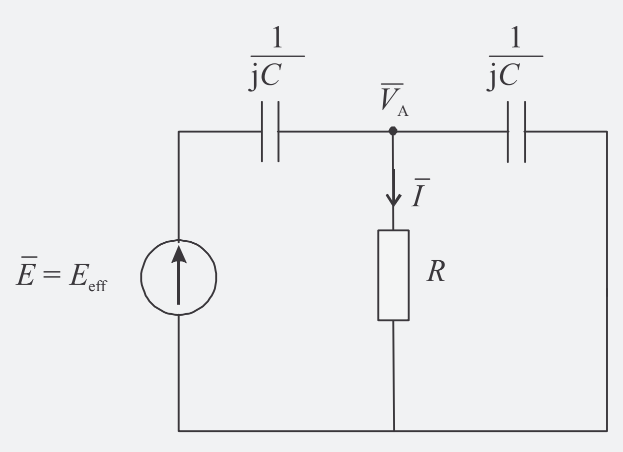


Figure 3.37

Dans le modèle complexe, cette équation devient :

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}_A}{R}$$

Appliquons le théorème de Millman au point A afin de déterminer $\overline{V}_A$:

$$\overline{V}_A = \frac{jC\omega\overline{E}}{jC\omega + \frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{jRC\omega E_{eff}}{1 + 2jRC\omega}$$

D'où : $$\overline{I} = \frac{\overline{V}_A}{R} = \frac{jC\omega E_{eff}}{1 + 2jRC\omega}$$

Comme cela est la règle dans un circuit en régime sinusoïdal, tout courant dans le circuit est sinusoïdal de même pulsation. On peut donc écrire :

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

ou encore : $$\overline{I} = I_{eff}e^{j\varphi}$$

Identifions les deux expressions de $\overline{I}$:

$$I_{eff}e^{j\varphi} = \frac{jC\omega E_{eff}}{1 + 2jRC\omega}$$

Identifions module et argument des deux membres :

$$I_{eff} = \left|\frac{jC\omega E_{eff}}{1 + 2jRC\omega}\right| = \frac{C\omega E_{eff}}{\sqrt{1 + 4R^2C^2\omega^2}}$$
$$\varphi = \arg\left(\frac{jC\omega E_{eff}}{1 + 2jRC\omega}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2RC\omega)$$

D'où : $$i(t) = \frac{C\omega E_{eff}\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 4R^2C^2\omega^2}}\cos\left[\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan(2RC\omega)\right]$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Nouvelle illustration de la méthode générale de résolution d'un problème en régime sinusoïdal, cet exercice doit également inciter le lecteur à rechercher les moyens indirects de mettre en évidence les grandeurs recherchées. Ici, le théorème de Millman donne immédiatement accès au courant.

12. Nous pouvons considérer que la résistance R est alimentée par le dipôle AB de la figure 3.38 que nous avons transposé dans le domaine complexe. Nous allons rechercher le générateur équivalent de Thévenin de ce dipôle.

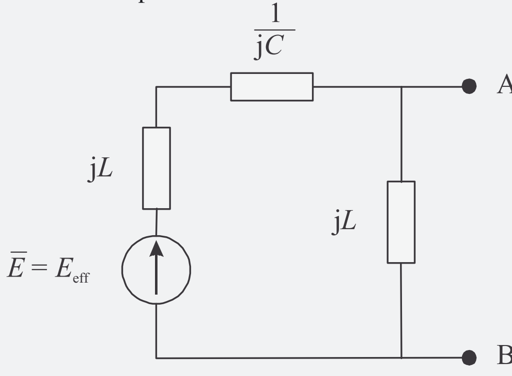


Figure 3.38

Le générateur de tension $\overline{E}$ en série avec l'impédance complexe $\left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ peut être remplacé par un générateur de courant $\overline{I}_0 = \frac{\overline{E}}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$ en parallèle avec l'impédance $j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$, comme indiqué sur la figure 3.39.

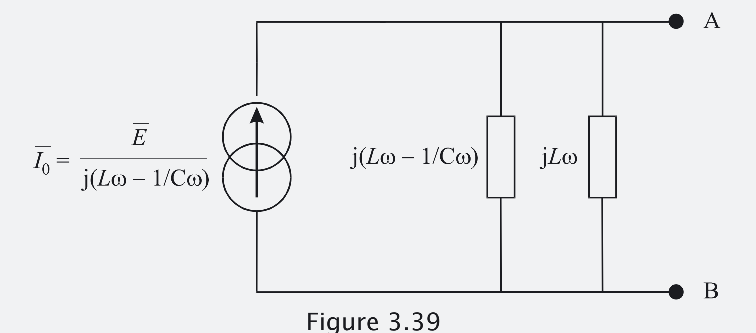


Figure 3.39

Les deux impédances $j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$ et $jL\omega$ en parallèle forment une impédance équivalente :

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{jL\omega \cdot j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}{j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) + jL\omega} = \frac{-L\omega\left(LC\omega^2 - 1\right)}{j\left(2LC\omega^2 - 1\right)}$$

qui se trouve en parallèle avec le générateur de courant. Cette association est équivalente au générateur équivalent de Thévenin représenté sur la figure 3.40.

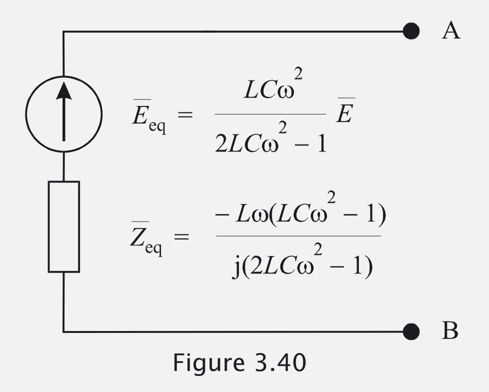


Figure 3.40

Il est alors facile de déterminer le courant $\overline{I}$ dans la résistance R en appliquant la loi des mailles dans le circuit de la figure 3.41.

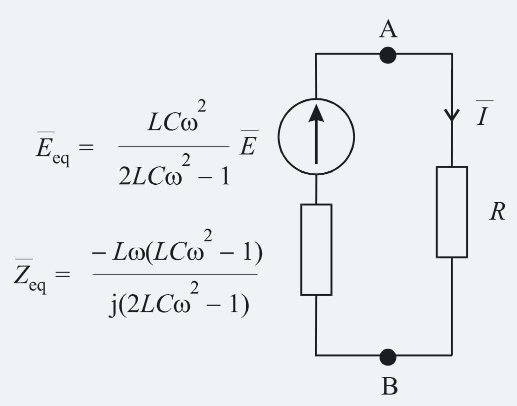


Figure 3.41

On obtient : $$\overline{I} = \frac{\overline{E}_{eq}}{R + \overline{Z}_{eq}} = \frac{\dfrac{LC\omega^2}{(2LC\omega^2 - 1)}\overline{E}}{R + \dfrac{-L\omega\left(LC\omega^2 - 1\right)}{j\,(2LC\omega^2 - 1)}}$$

Soit : $$\overline{I} = \frac{jLC\omega^2}{-L\omega\,(LC\omega^2 - 1) + jR\,(2LC\omega^2 - 1)}E_{eff}$$

Posons : $$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \;\Leftrightarrow\; \overline{I} = I_{eff}e^{j\varphi}$$

Il vient : $$I_{eff} = E_{eff}\left|\frac{jLC\omega^2}{-L\omega\,(LC\omega^2 - 1) + jR\,(2LC\omega^2 - 1)}\right|$$

$$I_{eff} = E_{eff}\frac{LC\omega^2}{\sqrt{\left[-L\omega\,(LC\omega^2 - 1)\right]^2 + \left[R\,(2LC\omega^2 - 1)\right]^2}}$$

De plus : $$\varphi = \arg\left[\frac{jLC\omega^2}{-L\omega\,(LC\omega^2 - 1) + jR\,(2LC\omega^2 - 1)}\right]$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arg\left[-L\omega\left(LC\omega^2 - 1\right) + jR\left(2LC\omega^2 - 1\right)\right]$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{R\left(2LC\omega^2 - 1\right)}{-L\omega\,(LC\omega^2 - 1)}\right]$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On retrouve ici les méthodes classiques de transformations Thévenin – Norton auxquelles nous avons pu nous familiariser au chapitre 2. Si elles se transposent facilement au modèle complexe, il faut néanmoins être vigilant dans les calculs algébriques complexes et bien penser, en fin de calcul, à repasser au modèle réel temporel.

13. Le circuit de la figure 3.23 est équivalent à celui de la figure 3.42 où $\overline{Z}$ représente l'impédance équivalente à l'association des deux condensateurs C_1 et C_2, et de la résistance R_2.

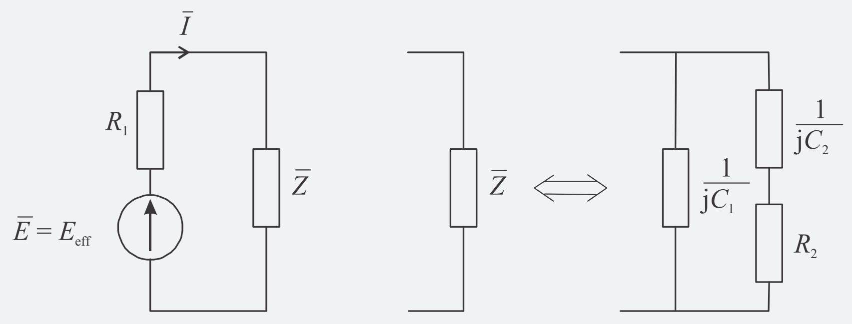


Figure 3.42

On a : $$\frac{1}{\overline{Z}} = jC_1\omega + \frac{1}{R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega}}$$

Soit : $$\frac{1}{\overline{Z}} = jC_1\omega + \frac{jC_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega}$$

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{jC_1\omega(1 + jR_2C_2\omega) + jC_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega} = \frac{-R_2C_1C_2\omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega}{1 + jR_2C_2\omega}$$

D'où : $$\overline{Z} = \frac{1 + jR_2C_2\omega}{-R_2C_1C_2\omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega}$$

La figure 3.41 nous montre que $\overline{I}$ correspond bien au courant débité dans l'association série de R_1 et de $\overline{Z}$, alimentée par le générateur $\overline{E}$. On a donc :

$$\overline{I} = \frac{E_{eff}}{R_1 + \overline{Z}}$$

Posons : $$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \overline{I} = I_{eff}e^{j\varphi}$$

Il vient : $$I_{eff}e^{j\varphi} = \frac{E_{eff}}{R_1 + \overline{Z}}$$

Soit : $$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\left|R_1 + \overline{Z}\right|} \text{ et } \varphi = \arg\left(\frac{E_{eff}}{R_1 + \overline{Z}}\right)$$

Calculons tout d'abord la valeur efficace I_{eff} du courant $i(t)$:

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\left|R_1 + \dfrac{1 + jR_2C_2\omega}{-R_2C_1C_2\omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega}\right|}$$

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\left|\dfrac{R_1\left[-R_2C_1C_2\omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega\right] + 1 + jR_2C_2\omega}{-R_2C_1C_2\omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega}\right|}$$

$$I_{eff} = E_{eff}\frac{\left|-R_2C_1C_2\omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega\right|}{\left|-R_1R_2C_1C_2\omega^2 + 1 + jR_1(C_1 + C_2)\omega + jR_2C_2\omega\right|}$$

$$I_{eff} = E_{eff}\frac{\sqrt{R_2^2C_1^2C_2^2\omega^4 + (C_1 + C_2)^2\omega^2}}{\sqrt{(1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 + (R_1(C_1 + C_2) + R_2C_2)^2\,\omega^2}}$$

Calculons à présent l'avance algébrique de phase du courant $i(t)$ par rapport à la tension $e(t)$:

$$\varphi = \arg\left(\frac{E_{eff}}{R_1 + \overline{Z}}\right) = -\arg\left(R_1 + \overline{Z}\right)$$

$$\varphi = -\arg\left(\frac{-R_1R_2C_1C_2\omega^2 + 1 + jR_1(C_1 + C_2)\omega + jR_2C_2\omega}{-R_2C_1C_2\omega^2 + j(C_1 + C_2)\omega}\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left[\frac{R_1(C_1 + C_2)\omega + R_2C_2\omega}{1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2}\right] - \arctan\left[\frac{(C_1 + C_2)\omega}{R_2C_1C_2\omega^2}\right]$$

Applications numériques :

$$I_{eff} \approx 97 \text{ mA}$$

$$\varphi = -1{,}41 \text{ rad} = -80^{\circ}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Outre les outils classiques de résolutions, du type Millman, Thévenin ou autre, certains cas simples peuvent être résolus en invoquant des lois aussi simples que la loi d'Ohm généralisée au modèle complexe.

14. **1.** Nous avons déjà calculé dans l'exercice 3.3 la valeur de l'impédance complexe de cette association série *RLC* :

$$\overline{Z} = \frac{(1 - LC\omega^2) + j(RC\omega)}{jC\omega}$$

2. De même, la valeur de l'impédance réelle a été calculée et vaut :

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

3. D'après le modèle complexe de la figure 3.43, nous pouvons écrire :

$$\overline{E} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

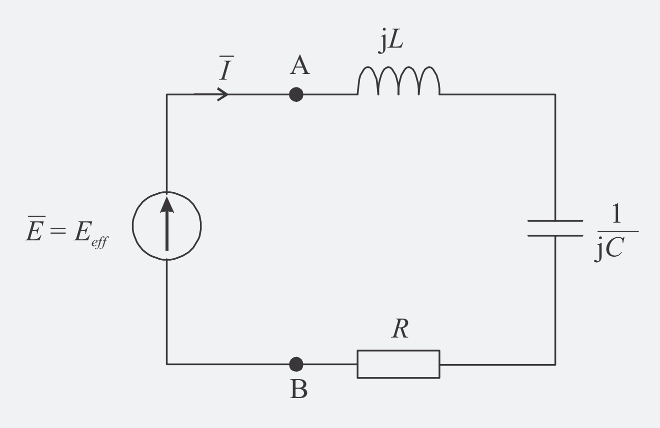


Figure 3.43

Sachant déjà que le courant $i(t)$ est sinusoïdal de même fréquence que $e(t)$, nous pouvons écrire :

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

Soit : $$\overline{I} = I_{eff}e^{j\varphi}$$

Par ailleurs, $$\overline{E} = \overline{Z} \cdot \overline{I} \Rightarrow \left|\overline{E}\right| = Z\left|\overline{I}\right| \Rightarrow E_{eff} = ZI_{eff} \Rightarrow E_0 = ZI_0$$

L'amplitude I_0 sera maximale si et seulement si la valeur de Z est minimale. Il nous faut donc déterminer ω telle que Z soit minimale.

Il est clair que Z sera minimale si et seulement si $\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) = 0$

En effet, l'impédance réelle est toujours supérieure à R ; sa valeur minimale correspond bien au cas où $Z = R$.

On doit donc avoir : $$\frac{1}{C\omega} = L\omega \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

D'où : $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Application numérique :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 22{,}4 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le phénomène qui se traduit par une valeur maximale de l'amplitude du courant dans un circuit linéaire est appelé **résonance**. La pulsation ω_0 pour laquelle se produit ce phénomène est appelée **pulsation de résonance**.

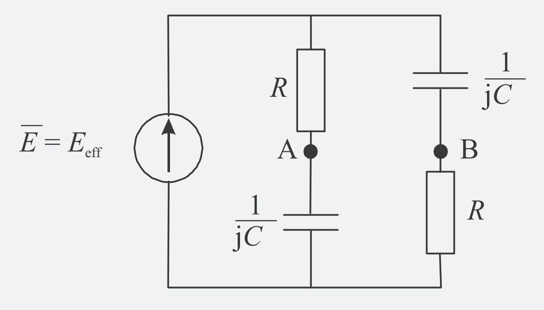


Figure 3.44

15. **1.** Utilisons le modèle complexe de notre circuit (figure 3.44).

Calculons successivement $\overline{V}_A$ et $\overline{V}_B$ les formes complexes respectives de vA et de vB : pour ce faire, nous pouvons utiliser le principe du diviseur de tension, qui s'applique sans aucun problème à la forme complexe en régime sinusoïdal :

$$\overline{V}_A = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R}\overline{E} \quad \text{et} \quad \overline{V}_B = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}}\overline{E}$$

D'où par simple différence :

$$\overline{V}_A - \overline{V}_B = \left(\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R} - \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}}\right)\overline{E} = \left(\frac{-R+\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}\right)\overline{E}$$

2. On peut encore écrire :

$$\overline{V}_A - \overline{V}_B = \left(\frac{-R+\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}\right)E_{eff} = U_{eff}e^{j\varphi}$$

avec :

$$U_{eff} = E_{eff}\left|\frac{-R+\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}\right| = E_{eff}\frac{\left|-R+\frac{1}{jC\omega}\right|}{\left|R+\frac{1}{jC\omega}\right|} = E_{eff}$$

3. On a :

$$\varphi = \arg\left(\frac{-R+\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}\right) = \arg\left(-R-\frac{j}{C\omega}\right) - \arg\left(R-\frac{j}{C\omega}\right)$$

Comme nous souhaitons que $v_A - v_B$ soit en quadrature de phase par rapport à $e(t)$, il nous faut avoir : $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Soit en exprimant les arguments des nombres complexes ci-dessus :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

On doit donc avoir :

$$2\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = \pm\frac{\pi}{4}$$

R, C et ω étant tous trois positifs, $\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$ est positif.

On tire donc : $$\frac{1}{RC\omega} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La résolution d'un problème d'électricité en régime sinusoïdal ne nécessite pas toujours l'expression de la forme réelle temporelle des grandeurs électriques. Cela est particulièrement vrai lorsqu'il s'agit de discuter de déphasages puisque ces informations ne sont ni plus ni moins que les arguments des formes complexes de ces grandeurs.

16. **1.** La connaissance du courant $\overline{I}$ dans la résistance R nous donnera accès à la tension $\overline{U}$ recherchée. Si nous connaissons $\overline{V}_A$, la tension au point A, il est clair que la loi d'Ohm nous conduira à l'expression de $\overline{I}$, puisque cette tension $\overline{V}_A$ se trouve être la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble $R + \frac{1}{jC\omega}$.

Calculons donc $\overline{V}_A$ en appliquant le théorème de Millman au point A.

$$\overline{V}_A = \frac{jC\omega\overline{E}}{jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}} = \frac{jC\omega\overline{E}}{jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{jC\omega}{jRC\omega + 1}}$$

Or : $$\overline{I} = \frac{\overline{V}_A}{R + \frac{1}{jC\omega}} \Rightarrow \overline{U} = R\overline{I} = \frac{R\overline{V}_A}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega\overline{V}_A}{jRC\omega + 1}$$

D'où : $$\overline{U} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1} \cdot \frac{jC\omega\overline{E}}{jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{jC\omega}{jRC\omega + 1}}$$

$$\overline{U} = \frac{-RC^2\omega^2\overline{E}}{-RC^2\omega^2 + jC\omega + jC\omega + \frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{-R^2C^2\omega^2\overline{E}}{-R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega + 1}$$

D'où : $$H(\omega) = \frac{\overline{U}}{\overline{E}} = \frac{-R^2C^2\omega^2}{-R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega + 1}$$

et : $$|H(\omega)| = \frac{R^2C^2\omega^2}{\sqrt{(1 - R^2C^2\omega^2)^2 + 9R^2C^2\omega^2}}$$

2. Cherchons la pulsation ω_0 pour laquelle $|H(\omega)| = \frac{1}{3}$:

$$|H(\omega_0)| = \frac{R^2C^2\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - R^2C^2\omega_0^2\right)^2 + 9R^2C^2\omega_0^2}} = \frac{1}{3}$$

Élevons les deux membres de cette équation au carré :

$$\frac{R^4C^4\omega_0^4}{\left(1 - R^2C^2\omega_0^2\right)^2 + 9R^2C^2\omega_0^2} = \frac{1}{9}$$

Posons $X = R^2C^2\omega_0^2$

Il vient : $$\frac{X^2}{(1 - X)^2 + 9X} = \frac{1}{9}$$

Soit : $$9X^2 = (1 - X)^2 + 9X \Rightarrow 8X^2 - 7X - 1 = 0$$

Cette équation du second degré possède une racine évidente : $X = 1$, l'autre racine étant égale à $X = -\frac{1}{8}$. Seule la racine $X = 1$ convient puisque $X = R^2C^2\omega_0^2$. On en déduit donc :

$$R^2C^2\omega_0^2 = 1$$

D'où : $$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

3. Calculons à présent le déphasage φ. Puisqu'il correspond à l'avance de phase de $\overline{U}$ par rapport à $\overline{E}$, on aura :

$$H(\omega) = \frac{\overline{U}}{\overline{E}} \Rightarrow \arg H(\omega) = \arg \overline{U} - \arg \overline{E} = \varphi$$

D'où : $$\varphi = \arg\left(\frac{-R^2C^2\omega^2}{-R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega + 1}\right)$$

Pour $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, on obtient :

$$\varphi(\omega_0) = \arg\left(\frac{-1}{3j}\right) = \arg\left(\frac{j}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Ce qui est particulièrement intéressant dans ce problème, c'est la stratégie de résolution mise en œuvre pour déterminer l'expression de $\overline{U}$. Ici, c'est la détermination de $\overline{V}_{\mathrm{A}}$, puis de $\overline{I}$, qui permet d'accéder à $\overline{U}$. Cette prévision permet de cibler immédiatement la technique à utiliser, à savoir le théorème de Millman.

17. **1.** Le théorème de Thévenin prévoit que le dipôle AB est équivalent à un dipôle composé de l'association en série d'une source de tension parfaite $\overline{E}_{\mathrm{eq}}$ et d'une impédance $\overline{Z}_{\mathrm{eq}}$ (figure 3.45).

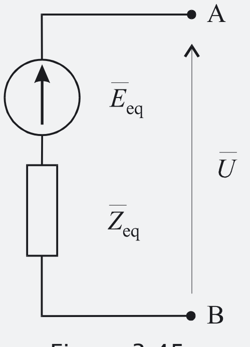


Figure 3.45

L'impédance $\overline{Z}_{eq}$ est l'impédance équivalente au dipôle AB de la figure 3.24, la source $\overline{E}$ étant court-circuitée (figure 3.46).

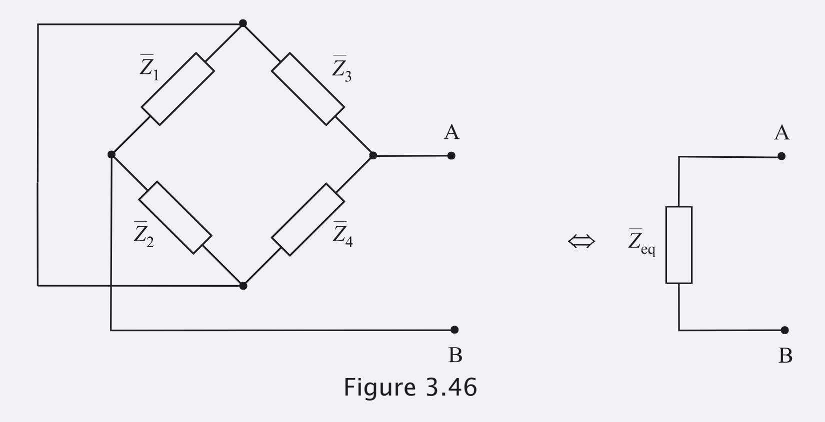


Figure 3.46

En transformant légèrement le circuit original, nous pouvons faire apparaître les associations évidentes entre les quatre impédances (figure 3.47).

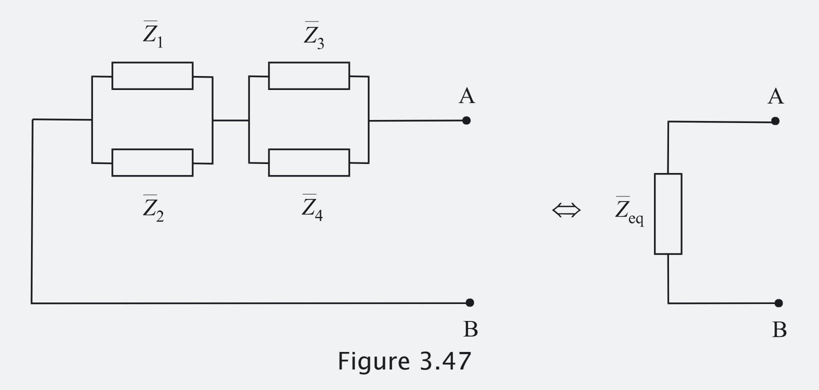


Figure 3.47

$\overline{Z}_{eq}$ est ainsi formé de l'association en série de deux dipôles, l'un étant lui-même constitué des impédances $\overline{Z}_3$ et $\overline{Z}_4$ en parallèle, l'autre étant composé de $\overline{Z}_1$ et de $\overline{Z}_2$ également associées en parallèle.

Donc : $\overline{E}_{eq}$

La tension $\overline{E}_{eq}$ du générateur de Thévenin est la tension à vide du dipôle AB, c'est-à-dire lorsqu'aucun courant ne circule dans les branches *a* et *b* du circuit (figure 3.48).

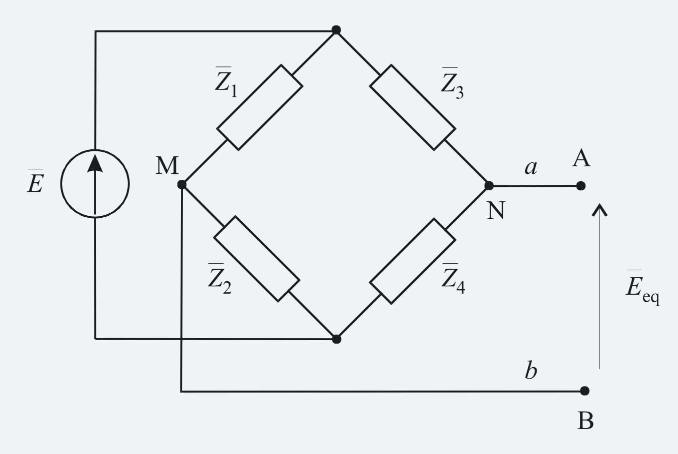


Figure 3.48

Dans ces conditions, on peut appliquer le principe du diviseur de tension aux points M et N.

Ainsi :
$$\overline{E}_{eq} = \overline{V}_N - \overline{V}_M = \frac{\overline{Z}_4}{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}\overline{E} - \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}\overline{E}$$

Soit :
$$\overline{E}_{eq} = \left(\frac{\overline{Z}_4}{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4} - \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}\right)\overline{E}$$

2. La figure 3.45 nous montre que :

$$\overline{U} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{E}_{eq} = 0$$

Le pont sera donc en équilibre si et seulement si :

$$\frac{\overline{Z}_4}{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4} = \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$$

Soit :
$$\overline{Z}_4\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\right) = \overline{Z}_2\left(\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4\right)$$

D'où :
$$\overline{Z}_4\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2\overline{Z}_3$$

3. Les quatre impédances ont pour valeurs :

$$\overline{Z}_1 = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega} \qquad \overline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$
$$\overline{Z}_3 = R_3 \qquad \overline{Z}_4 = R_4$$

Écrivons la condition d'équilibre du pont :

$$R_4\frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega} = R_3\frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

D'où :
$$\frac{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)}{jC_1\omega} = \frac{R_3R_2}{R_4}$$

Soit :
$$\frac{1 - R_2R_1C_2C_1\omega^2 + j\omega(R_1C_1 + R_2C_2)}{jC_1\omega} = \frac{R_3R_2}{R_4}$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales, ainsi que leurs parties imaginaires. Séparons donc les parties réelles et imaginaires dans cette équation :

$$\frac{R_1C_1 + R_2C_2}{C_1} - j\frac{1 - R_2R_1C_2C_1\omega^2}{C_1\omega} = \frac{R_3R_2}{R_4}$$

D'où :
$$\begin{cases}\dfrac{R_1C_1+R_2C_2}{C_1}=\dfrac{R_3R_2}{R_4}\\ 1-R_2R_1C_2C_1\omega^2=0\end{cases}$$

Ces conditions doivent être simultanément vérifiées pour que le pont soit équilibré :

$$\frac{R_1C_1+R_2C_2}{C_1}=\frac{R_3R_2}{R_4}\Rightarrow\frac{R_1}{R_2}+\frac{C_2}{C_1}=\frac{R_3}{R_4}$$

$$1-R_2R_1C_2C_1\omega^2=0\Rightarrow\omega=\frac{1}{\sqrt{R_2R_1C_2C_1}}$$

La première de ces conditions impose une relation entre les valeurs des différents dipôles qui constituent le pont. Comme toutes les valeurs sont connues sauf celle de C_2, cette relation nous permet d'accéder à cette valeur :

$$C_2=C_1\left(\frac{R_3}{R_4}-\frac{R_1}{R_2}\right)$$

A.N. :
$$C_2=47\times10^{-6}\times\left(\frac{810}{220}-\frac{1\,000}{470}\right)=73\,\mu\text{F}$$

C_2 étant ajusté à cette valeur, l'équilibre du pont sera réalisé si :

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{R_2R_1C_2C_1}}=\frac{1}{\sqrt{470\times1\,000\times73\times10^{-6}\times47\times10^{-6}}}=25\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On notera la méthode de résolution très originale de ce problème somme toute classique de pont de Wheatstone qui utilise le théorème de Thévenin. Plus délicate à traiter en régime sinusoïdal qu'en régime continu, cette étude montre que les conditions d'équilibre s'écrivent sous formes analogues dans les deux types de régime.

18. 1. La valeur efficace du courant dans la résistance R est maximale lorsque la valeur efficace de la tension à ses bornes l'est aussi.

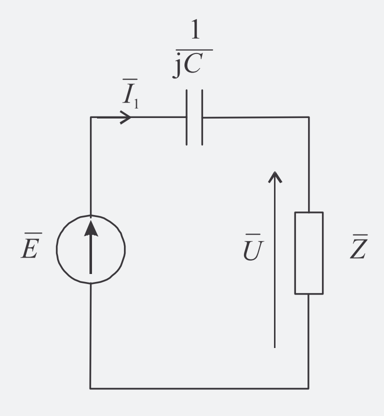


Figure 3.49

Calculons alors l'expression de $\overline{U}$: la figure 3.49 fait apparaître un pont diviseur de tension pour lequel :

$$\frac{1}{\overline{\overline{Z}}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}$$

Soit : $$\overline{Z} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

D'où : $$\overline{U} = \overline{E}\frac{\overline{Z}}{\overline{Z} + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

Soit : $$\overline{U} = \overline{E}\frac{\dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega}}{\dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par $R + jL\omega$.

On obtient : $$\overline{U} = \overline{E}\frac{jRL\omega}{jRL\omega + \dfrac{R + jL\omega}{jC\omega}}$$

Soit en multipliant par $\frac{jC\omega}{jC\omega}$:

$$\overline{U} = \overline{E}\frac{-RLC\omega^2}{-RLC\omega^2 + R + jL\omega}$$

La valeur efficace de cette tension est égale à :

$$U_{eff} = \left|\overline{U}\right| = \frac{E_{eff}RLC\omega^2}{\sqrt{\left(R - RLC\omega^2\right)^2 + L^2\omega^2}}$$

Cette valeur efficace est maximale lorsque $R - RLC\omega^2 = 0$.

Soit : $$LC\omega^2 = 1$$

D'où : $$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A.N. : $$\omega = \frac{1}{\sqrt{7 \times 10^{-3} \times 8{,}2 \times 10^{-6}}} = 4{,}2 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. On a : $$Q = \frac{\left|\overline{U}\right|}{E_{eff}} = \frac{RLC\omega^2}{\sqrt{\left(R - RLC\omega^2\right)^2 + L^2\omega^2}}$$

Pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on a : $$Q = \frac{\left|\overline{U}\right|}{E_{eff}} = \frac{R}{L\omega}$$

A.N. : $$Q = \frac{1500}{7 \times 10^{-3} \times 4{,}2 \times 10^3} = 51$$

3. On a bien sûr :

$$I_{2,eff} = |\overline{I}_2| = \frac{|\overline{U}|}{R}$$

Soit dans le cas général :

$$I_{2,eff} = |\overline{I}_2| = \frac{E_{eff} RLC\omega^2}{R\sqrt{(R - RLC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}}$$

Pour $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, on a :

$$I_{2,eff} = \frac{E_{eff}}{L\omega}$$

A.N. :

$$I_{2,eff} = \frac{10}{7 \times 10^{-3} \times 4{,}2 \times 10^3} = 340 \text{ mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La pulsation pour laquelle le courant dans le récepteur R est maximal est la pulsation de résonance du circuit. On dit aussi que C et L sont en résonance. Le paramètre Q est appelé **facteur de surtension**. Le phénomène de surtension est ainsi baptisé car bien que le circuit soit alimenté avec une tension sinusoïdale d'amplitude E_{eff}, le récepteur R présente à ses bornes une tension d'amplitude beaucoup plus élevée. On remarque par ailleurs que l'amplitude du courant dans la résistance R ne dépend pas de sa valeur. Cette propriété étonnante est due au phénomène de surtension dans le circuit.

Les circuits électriques en régime transitoire

4

MOTS-CLÉS

▪ interrupteur ▪ commutateur ▪ équation différentielle ▪ conditions initiales ▪ équations types ▪ charge d'un condensateur ▪ décharge d'un condensateur ▪ circuit oscillant ▪ régime amorti ▪ régime oscillatoire amorti ▪ régime critique ▪ pulsation propre ▪ coefficient d'amortissement

Les régimes transitoires correspondent peu ou prou au passage d'un régime permanent à un autre, notamment à la mise en route ou à l'extinction d'un circuit électrique. Des phénomènes particuliers peuvent apparaître lors de ces changements de régime, pouvant avoir parfois des conséquences sur le circuit. Il est donc primordial de comprendre ces phénomènes et de savoir les mettre en équation. Le principal outil utilisé est la résolution d'équations différentielles simples.

Régime variable et régime transitoire

Un circuit électrique fonctionne en régime dit variable lorsqu'il est alimenté par une source quelconque, par exemple une source de tension $e(t)$ qui peut présenter n'importe quelle forme. En réalité, cette forme n'est jamais véritablement quelconque, car les régimes variables les plus fréquemment rencontrés sont ceux qui correspondent au passage d'un régime permanent à un autre régime permanent. Ils portent alors le nom de régimes transitoires. Ceux que nous étudions correspondent en général à des changements de régime dus à l'ouverture ou à la fermeture d'un interrupteur dans le circuit.

Ainsi, par exemple, un dipôle AB alimenté par un générateur parfait de tension constante E_0 par l'intermédiaire d'un interrupteur K peut être considéré comme passant brusquement d'un régime permanent $e(t) = 0$ à un autre régime permanent $e(t) = E_0$ lorsqu'on ferme l'interrupteur (figure 4.1). Tout se passe comme si le circuit, démuni de son interrupteur, était alimenté par la tension $e(t)$ représentée sur la figure 4.2.

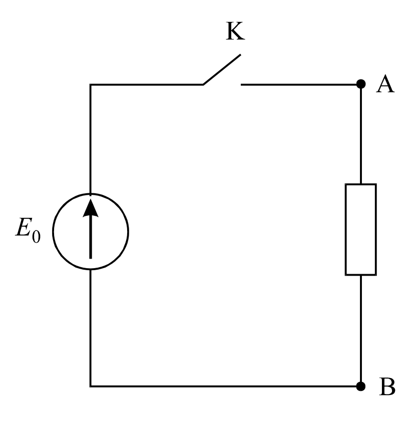


Figure 4.1

Il nous suffit de considérer que l'instant $t = 0$ correspond à l'instant de fermeture de l'interrupteur. Comme un interrupteur n'est pas un élément linéaire, on préfère utiliser le modèle de la figure 4.2, dans laquelle le circuit est linéaire (schémas similaires à ceux que nous avons vus dans les chapitres précédents), mais dans lequel la forme de la tension d'alimentation n'est pas constante.

Les régimes transitoires peuvent intervenir aussi bien à l'ouverture qu'à la fermeture d'interrupteurs, ou encore au basculement de commutateurs. D'une manière générale, le régime transitoire conduit toujours le système vers un régime permanent.

Les problèmes à résoudre sont en général toujours les mêmes : il s'agit de déterminer tensions et courants dans le circuit. Comme celui-ci n'est pas alimenté par une tension constante ou sinusoïdale, tous les courants et toutes les tensions dans le circuit seront *a priori* variables.

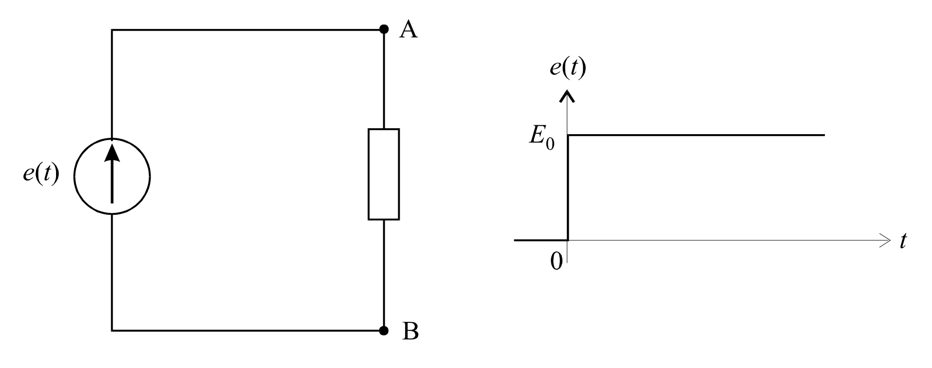


Figure 4.2

Fiche 2

Mise en équation des régimes transitoires

Comme les grandeurs électriques sont variables et que leur forme n'est pas connue *a priori*, il est nécessaire d'avoir recours aux équations de fonctionnement des dipôles élémentaires. La figure 4.3 rappelle ces équations pour les trois dipôles passifs linéaires les plus utilisés.

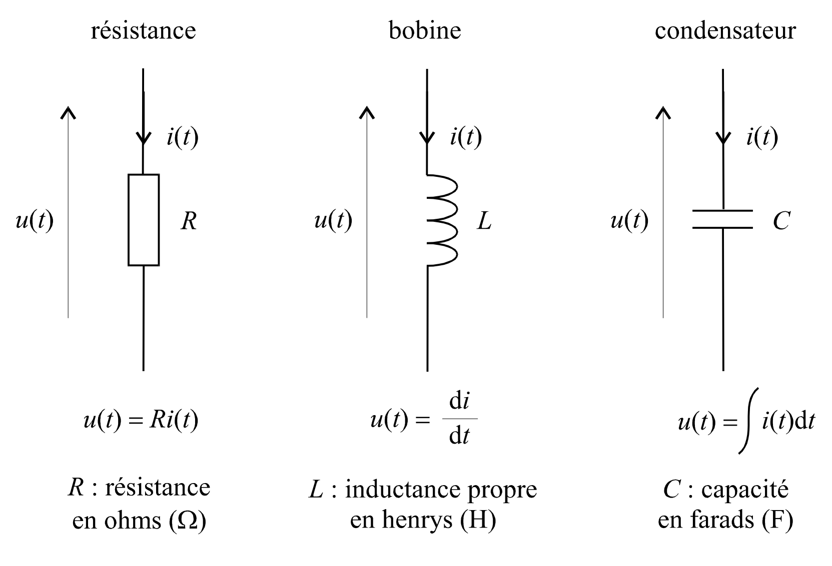


Figure 4.3

Dans un circuit linéaire en régime quelconque, les lois de Kirchhoff et le théorème de Millman sont les outils les plus utilisés. Comme la notion d'impédance est réservée au régime sinusoïdal, nous ne pourrons pas y faire appel. Il sera donc difficile d'utiliser les théorèmes de Thévenin et de Norton en régime transitoire.

(Notons qu'il existe une notion d'impédance généralisée qui permet d'obtenir un formalisme analogue à celui utilisé en régime sinusoïdal. Cette notion fait appel à la transformation de Laplace et est en général étudiée en fin de premier cycle ou au cours du deuxième cycle universitaire.)

L'écriture des lois de Kirchhoff dans un circuit en régime transitoire génère des équations plus complexes qu'en régime continu ou sinusoïdal. Ce sont en général des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Nous nous limiterons ici à l'étude des équations différentielles d'ordre 1 ou 2 qui sont le plus fréquemment rencontrées dans les problèmes liés aux régimes transitoires des circuits électriques linéaires. Pour des équations plus complexes, il serait nécessaire de faire appel à des outils mathématiques plus sophistiqués, qui sont hors de propos ici.

Fiche 3

Équations différentielles du premier ordre

Nous proposons ci-dessous les solutions des trois équations différentielles d'ordre 1 susceptibles d'être le plus fréquemment rencontrées dans les problèmes de régime transitoire.

$$
\begin{aligned}
f(t) + T\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= k \neq 0 && \Rightarrow \quad f(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \\
f(t) + T\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= kt && \Rightarrow \quad f(t) = k\,(t - T) + ke^{-\frac{t}{T}} \\
f(t) + T\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= 0 && \Rightarrow \quad f(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}
\end{aligned}
$$

Dans ce dernier cas, on évalue $f(0)$ pour déterminer A ; on est souvent obligé de considérer que $f(0) = f(0^-)$ à condition d'être certain que la fonction f soit continue en 0. Nous verrons dans les exercices de ce chapitre, que les conditions initiales jouent un rôle très important dans la résolution des équations différentielles.

Fiche 4

Équations différentielles du deuxième ordre

1. Généralités

La forme générale des équations différentielles linéaires rencontrées dans l'étude des régimes transitoires est la suivante :

$$
a\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + cf(t) = g(t)
$$

En règle générale, les paramètres a, b, c sont des nombres réels positifs. La solution d'une telle équation est toujours de la forme :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

- où $f_1(t)$ représente la solution de l'équation sans second membre :

$$a\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + cf(t) = 0$$

On recherche $f_1(t)$ en calculant les racines du polynôme caractéristique de l'équation différentielle :

$$ar^2 + br + c = 0$$

si par exemple $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ce polynôme possède deux racines réelles négatives r_1 et r_2. Dans ce cas, on a :

$$f_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Les constantes A et B se déterminent en fonction des conditions initiales.

- $f_2(t)$ est une solution particulière de l'équation complète. $f_1(t)$ est la composante de $f(t)$ qui correspond au régime *propre* (ou libre) du circuit. $f_2(t)$ correspond au régime dit *forcé*.

2. Équations types

Dans les régimes transitoires des circuits électriques, on cherchera à mettre les équations différentielles d'ordre 2 sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f(t) = k$$

$f(t)$ représentant soit une tension, soit un courant. ω_0 est la *pulsation propre* du circuit, λ son *facteur d'amortissement*.

On cherche l'expression de la solution de cette équation en calculant le discriminant du polynôme caractéristique.

- si $\lambda > 1$, c'est-à-dire si $\Delta > 0$, alors le polynôme a deux racines réelles :

$$r_1 = \omega_0\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)$$
$$r_2 = \omega_0\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)$$

  Alors :

$$f(t) = k + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

On dit que la tension (ou le courant) $f(t)$ subit un régime *amorti*. Les constantes A et B sont calculées en fonction des conditions initiales.

- si $\lambda < 1$, c'est-à-dire si $\Delta < 0$, alors le polynôme a deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \omega_0\left(-\lambda + j\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$
$$r_2 = \omega_0\left(-\lambda - j\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$

Alors :

$$f(t) = k + e^{-\lambda\omega_0 t}\left(A\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t + B\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t\right)$$

On dit que la tension (ou le courant) $f(t)$ subit un régime *pseudo-périodique* ou encore *oscillatoire amorti*. Les constantes A et B sont calculées en fonction des conditions initiales.

- si $\lambda = 1$, c'est-à-dire si $\Delta = 0$, alors le polynôme a une racine double réelle :

$$r = -\omega_0$$

Alors :

$$f(t) = k + (At + B)\,e^{-\omega_0 t}$$

Le régime de fonctionnement du circuit est dit *critique*. Les constantes A et B sont calculées en fonction des conditions initiales.

- si $\lambda = 0$, alors :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + f(t) = k \;\Rightarrow\; f(t) = k + A\cos\omega_0 t$$

Le régime est dit *oscillatoire*. Le circuit est en général appelé un *oscillateur*. La constante A est calculée à partir des conditions initiales, c'est-à-dire à l'aide de $f(0)$.

Entraînement

QCM

1. **Un condensateur chargé, de capacité $C = 20\ \mu$F, présente à ses bornes une tension $U = 10$ V. Quelle charge ce condensateur a-t-il emmagasiné ?**

❑ a. $Q = 200\ \mu$C

❑ b. $Q = 2\ \mu$C

❑ c. $Q = 10^5$ C

❑ d. $Q = 20\ \mu$C

2. **L'équation différentielle $u(t) + T\dfrac{du}{dt} = E$ a pour solution :**

❑ a. $u(t) = E\left(1 - e^{\frac{t}{T}}\right)$

❑ b. $u(t) = Ee^{-\frac{t}{T}}$

❑ c. $u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$

❑ d. $u(t) = Ee^{\frac{t}{T}}$

3. **L'équation différentielle $u(t) + T\dfrac{du}{dt} = 0$ a pour solution $u(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$ avec :**

❑ a. A égal à la tension $u(0)$.

❑ b. A restant indéterminé.

❑ c. A égal à la valeur de $u(t)$ lorsque $t \to \infty$.

❑ d. A variant en fonction du temps.

4. **Une source de tension parfaite E alimente au travers d'un interrupteur un dipôle formé de la mise en série d'une résistance R et d'une bobine d'auto-inductance L. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Soit $i(t)$ le courant qui circule dans le circuit à partir de $t = 0$. L'équation différentielle qui régit l'évolution de $i(t)$ est :**

❑ a. $\dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{E}{R}$

❑ b. $\dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{R}$

❑ c. $i(t) + \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{E}{R}$

❑ d. $i(t) + \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{R}$

5. **Une source de tension parfaite E alimente au travers d'un interrupteur un dipôle constitué de la mise en parallèle d'une résistance R et d'une bobine d'auto-inductance L. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Soit $i(t)$ le courant débité par le générateur à partir de $t = 0$. Laquelle de ces propositions est vraie ?**

❑ a. $i(t) = 0$ dès la fermeture de l'interrupteur.

❑ b. $i(t) = \frac{E}{R}$ dès la fermeture de l'interrupteu.

❑ c. $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.

❑ d. $i(t) \to \infty$ dès la fermeture de l'interrupteur.

6. **Une source de tension parfaite E alimente au travers d'un interrupteur un dipôle constitué de la mise en parallèle d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Soit $i(t)$ le courant débité par le générateur à partir de $t = 0$. Laquelle de ces propositions est vraie ?**

❑ a. $i(t) = 0$ dès la fermeture de l'interrupteur.

❑ b. $i(t) = \frac{E}{R}$ dès la fermeture de l'interrupteur.

❑ c. $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = RC$.

❑ d. $i(t) \to \infty$ dès la fermeture de l'interrupteur.

7. **Une source de tension parfaite E alimente au travers d'un interrupteur un dipôle constitué de la mise en série d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Soit $i(t)$ le courant débité par le générateur à partir de $t = 0$. Lorsque $t \to \infty$, vers quelle valeur tend la tension aux bornes de la résistance ?**

❑ a. 0

❑ b. E

❑ c. $E/2$

❑ d. $-E$

Réponses

1. **a.** La charge d'un condensateur et la tension à ses bornes sont liées par la relation $C = \dfrac{Q}{U} \Rightarrow Q = CU$, d'où $Q = 20 \times 10^{-6} \times 10 = 200 \times 10^{-6}$ C.

2. **c.** Voir Fiche 2.

3. **a.** La grandeur A n'est pas indéterminée et est une constante. Les réponses b et d sont donc à éliminer. En considérant l'expression $u(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$ pour $t = 0$, il vient : $u(0) = Ae^{-\frac{0}{T}} = A$.

4. **d.** Il suffit d'écrire la loi des mailles à partir de l'instant $t = 0$ en considérant que la résistance présente à ses bornes une tension $Ri(t)$ et que la bobine présente une tension $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $E - Ri(t) - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, d'où $i(t) + \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{R}$.

5. **d.** En fermant l'interrupteur, on applique immédiatement une tension E aux bornes de la résistance et aux bornes de la bobine. En appelant $i_L(t)$ le courant dans la bobine, on peut écrire : $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = E$, soit $i_L(t) = \dfrac{E}{L}t + \mathrm{C^{te}}$, avec $\mathrm{C^{te}} = i_L(0) = 0$. Le courant dans la bobine croît donc sans cesse (sous la forme d'une rampe) et tend en théorie vers l'infini. Il en est de même, bien sûr, du courant débité par le générateur.

6. **b.** En fermant l'interrupteur, on applique immédiatement une tension E aux bornes de la résistance et aux bornes du condensateur. Ce dernier se charge donc instantanément et se comporte ensuite comme un circuit ouvert. Le circuit se réduit alors à l'alimentation de la résistance R par le générateur. On a donc immédiatement $i(t) = \dfrac{E}{R}$.

7. **a.** Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est complètement chargé et se comporte comme un circuit ouvert. Aucun courant ne peut plus circuler dans le circuit. La tension aux bornes de la résistance est donc nulle.

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	Un régime transitoire correspond à la transition entre un régime continu et un régime sinusoïdal.	☐	☐
2.	Chaque fois que l'on met en marche un dispositif électrique, on note la présence d'un régime transitoire.	☐	☐
3.	Il est possible d'utiliser le théorème de Millman en régime transitoire.	☐	☐
4.	Il est possible d'utiliser le principe de superposition en régime transitoire.	☐	☐
5.	Il est possible d'utiliser le théorème de Thévenin en régime transitoire.	☐	☐
6.	Un condensateur placé en série avec une résistance et alimenté par une source de tension continue se charge d'autant plus vite que la résistance est élevée.	☐	☐
7.	Lorsque deux condensateurs sont disposés en série, ils possèdent obligatoirement la même charge.	☐	☐
8.	Lorsque deux condensateurs sont placés en parallèle, ils possèdent obligatoirement la même charge.	☐	☐
9.	La durée d'un régime transitoire régi par une équation différentielle linéaire à coefficient constant est infinie.	☐	☐
10.	La durée de décharge d'un condensateur dépend de la valeur de la résistance dans laquelle il se décharge.	☐	☐
11.	Dans l'équation différentielle $u(t) + RC\dfrac{du}{dt} = E$, la constante E correspond à la valeur de $u(t)$ lorsque $t \to \infty$.	☐	☐
12.	Il est impossible de produire un régime oscillatoire dans un circuit RC série.	☐	☐
13.	Un circuit régi par une équation différentielle du second degré et possédant un terme d'ordre 1 non nul est toujours le siège d'un régime oscillatoire amorti.	☐	☐
14.	Dans un circuit RL série, la valeur de la constante de temps varie en fonction du temps.	☐	☐
15.	Pour déterminer les constantes dans la solution d'une équation différentielle, il faut connaître les conditions aux limites, c'est-à-dire, les valeurs de la grandeur recherchée pour $t = 0$ et pour $t \to \infty$.	☐	☐
16.	En régime oscillatoire amorti, la fréquence des oscillations ne dépend pas du facteur d'amortissement.	☐	☐

Réponses

1. **Faux.** Un régime transitoire correspond à la transition entre un régime permanent et un autre régime permanent mais il est très rare de passer d'un régime continu à un régime sinusoïdal. Plus communément, les régimes transitoires sont observés lors de la transition entre deux régimes continus.

2. **Vrai.** On passe d'un régime de repos continu à un régime continu vrai.

3. **Vrai.** La loi des nœuds est applicable quel que soit le régime et le théorème de Millman n'est rien d'autre qu'une conséquence de la loi des nœuds.

4. **Vrai.** Il s'agit là d'un principe universel du moment que le circuit est linéaire et que les sources sont indépendantes.

5. **Faux.** Le théorème de Thévenin nécessite l'utilisation de modèles spécifiques en régime continu comme en régime sinusoïdal. Toutefois, une notion d'impédance généralisée existe, permettant d'utiliser malgré tout ce théorème mais elle n'est pas abordée dans cet ouvrage.

6. **Faux.** Avec une résistance élevée, on limite obligatoirement le courant dans le circuit et comme le courant correspond à la variation de charge aux bornes d'un condensateur, on limitera d'autant cette variation de charge que la résistance sera élevée.

7. **Vrai.** À condition qu'aucun autre dipôle ne les sépare. Les armatures des deux condensateurs, lorsqu'elles sont reliées entre elles, possèdent systématiquement des charges opposées. Les deux condensateurs ont donc bien à chaque instant, la même charge.

8. **Faux.** Ils possèdent la même tension à leurs bornes. Leur charge dépendant de cette tension et de leurs capacités, elles seront obligatoirement différentes si ces capacités ne sont pas les mêmes.

9. **Vrai en théorie mais faux en pratique.** Les exponentielles décroissantes tendent effectivement vers 0 sans jamais l'atteindre, mathématiquement. Toutefois, les non linéarités même minimes qui existent toujours, même si elles ne sont pas modélisées, font que tous les systèmes atteignent un régime stable en un temps fini. Par exemple pour les systèmes d'ordre un, on estime que le régime transitoire dure environ 5 fois la constante de temps.

10. **Vrai.** Le courant dans le condensateur dépend de la résistance dans laquelle il se décharge. Ce courant correspondant à la variation de charge dans le condensateur, la valeur de la résistance influe nécessairement sur le temps de décharge du condensateur.

11. **Vrai.** Lorsque $t \to \infty$, le régime transitoire est censé être terminé. Donc $u(t)$ ne varie plus. Donc $\dfrac{du}{dt} = 0$. L'équation se résume alors à $u(t) = E$.

12. **Vrai.** La présence d'oscillations nécessite une équation d'ordre 2. Dans un simple circuit RC, l'équation différentielle se limite à l'ordre 1.

13. **Faux.** Tout dépend du coefficient (ou facteur) d'amortissement. Le régime peut être oscillatoire amorti, amorti ou critique.

14. **Faux.** Dans tout circuit linéaire, les constantes de temps sont, comme leur nom l'indique, des constantes.

15. **Vrai.** Selon les cas, il suffit d'invoquer la condition initiale, c'est-à-dire la connaissance, souvent par un simple raisonnement physique, de la solution pour $t = 0$ et dans les cas plus complexes, d'invoquer de surcroît la condition finale, c'est-à-dire la connaissance de la limite quand $t \to \infty$ de la solution recherchée.

16. **Faux.** La fréquence des oscillations dépend de la valeur du facteur d'amortissement.

Entraînement

Exercices

1. Charge d'un condensateur au travers d'une résistance *

Dans le circuit représenté sur la figure 4.4, on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'expression de la tension $u(t)$ et tracer son graphe. Le condensateur est supposé déchargé au moment où se produit la fermeture de l'interrupteur. Déterminer et tracer ensuite le courant $i(t)$.

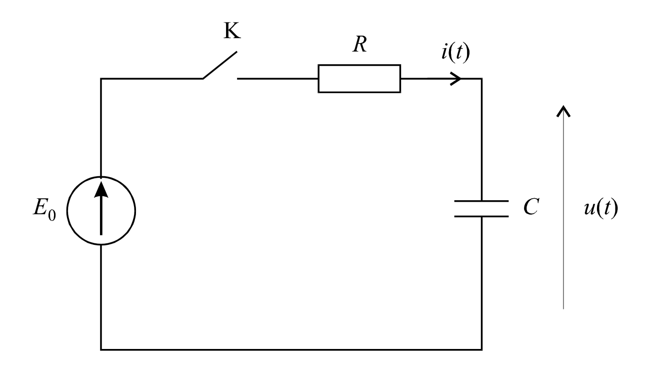


Figure 4.4

Conseil méthodologique

L'équation différentielle qui régit le fonctionnement du circuit s'obtient facilement en écrivant la loi des mailles. Il est conseillé de transformer cette équation en une équation différentielle dont la solution est la tension $u(t)$.

2. Décharge d'un condensateur dans une résistance **

Dans le circuit représenté sur la figure 4.5, le condensateur est initialement chargé et présente à ses bornes une tension $U_0 = 5$ V.

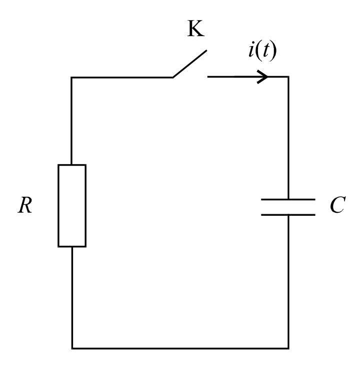


Figure 4.5

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Déterminer l'expression du courant $i(t)$ dans le circuit.

Conseil méthodologique

Ici encore, c'est la loi des mailles qui permet d'établir l'équation différentielle de fonctionnement du circuit. Pour obtenir la solution de cette équation, il convient de raisonner sur les conditions initiales du problème et notamment sur la valeur du courant à l'instant $t = 0_+$. Bien faire attention aux signes des grandeurs électriques.

3. Régime transitoire dans un circuit comportant un condensateur et deux résistances *

Dans le circuit représenté sur la figure 4.6, on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'expression de $u(t)$ et tracer son graphe. Le condensateur est supposé déchargé au moment où on ferme l'interrupteur.

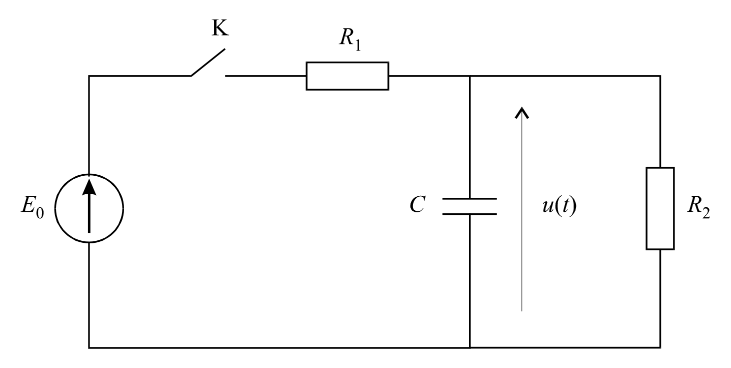


Figure 4.6

Conseil méthodologique

L'équation différentielle qui permet de déterminer la tension $u(t)$ s'obtient ici en plusieurs étapes. Il est conseillé de nommer et placer les différents courants dans le circuit, d'établir les différentes équations caractéristiques de chaque dipôle, puis d'éliminer les courants dans ces différentes équations.

4. Charge et décharge d'un condensateur en parallèle avec une résistance **

Dans le circuit représenté sur la figure 4.7, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. On ouvre à nouveau l'interrupteur à l'instant $t = 5$ s . Tracer les variations du courant $i(t)$.

Le condensateur est initialement déchargé.

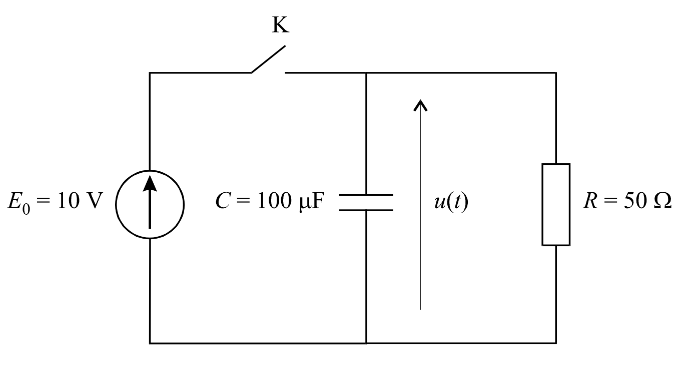


Figure 4.7

Conseil méthodologique

Raisonner physiquement sur ce qui se passe à la fermeture de l'interrupteur pour déterminer correctement les conditions initiales du problème qui seront nécessaires au calcul du courant dans la seconde partie de l'exercice.

5. Charge et décharge d'un condensateur dans deux branches différentes d'un circuit **

Dans le circuit représenté sur la figure 4.8, le commutateur se trouve initialement dans la position B et le condensateur est déchargé.

À l'instant $t = 0$, on bascule le commutateur dans la position A. Au bout de 10 s, on le bascule sur la position C.

Tracer l'évolution de la tension $u(t)$.

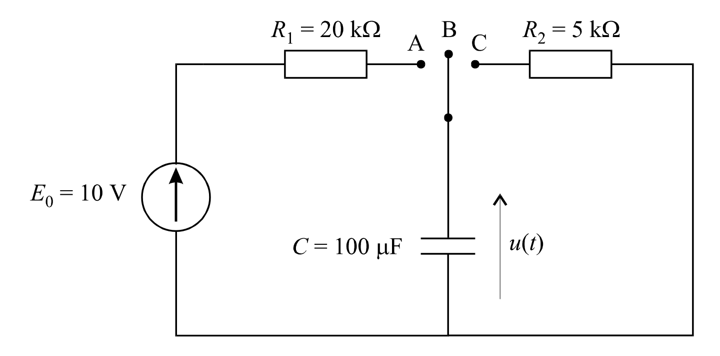


Figure 4.8

Conseil méthodologique

L'exercice est à résoudre en deux temps, avec deux types de conditions initiales différents. Dans la première partie, on pourra considérer qu'au bout des 10 s, le régime permanent est atteint.

6. Interruption d'un régime transitoire ***

On reprend le schéma de la figure 4.8 et l'énoncé de l'exercice 4.5, mais on bascule le commutateur sur C à l'instant $t = 3$ s . Tracer l'évolution de la tension $u(t)$.

Conseil méthodologique

L'exercice est toujours à résoudre en deux temps, avec deux types de conditions initiales différents. Compte tenu de l'instant de basculement du commutateur, il n'est plus possible de considérer que le régime permanent est atteint. Il est donc nécessaire de calculer la valeur de la tension au bout de $t = 3$ s.

7. Étude d'un circuit oscillant **

Dans le circuit de la figure 4.9, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Déterminer les variations de $u(t)$. Le condensateur est initialement déchargé.

Conseil méthodologique

La mise en équation du problème conduit à une équation différentielle du second ordre. Une fois de plus, il convient de raisonner sur les conditions initiales pour déterminer la solution de cette équation.

Conseil méthodologique

La première partie ne pose pas de difficulté majeure. L'écriture de la loi des mailles conduit à une équation du second ordre. La valeur du coefficient d'amortissement permet de déterminer le

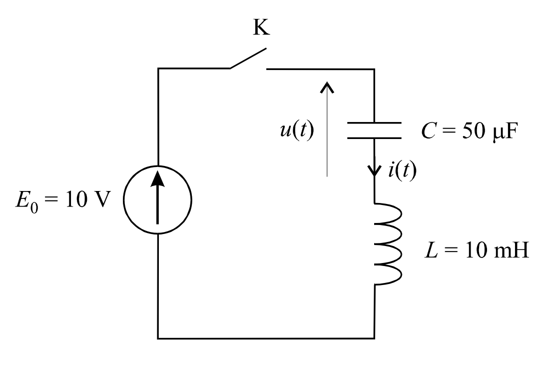


Figure 4.9

régime auquel est soumis le circuit et donc, la forme de la solution recherchée. Deux constantes seront à déterminer ; il sera donc nécessaire de raisonner sur les valeurs initiales des courants et des tensions. Dans la seconde partie, la valeur de la résistance influe sur le coefficient d'amortissement.

8. Régime transitoire oscillatoire amorti **

On considère le montage de la figure 4.10.

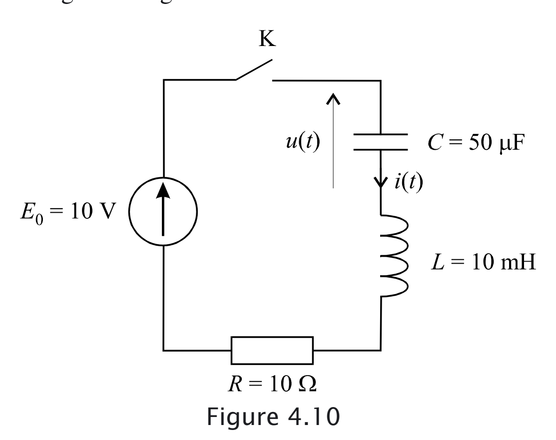


Figure 4.10

1. Établir l'équation différentielle qui régit le fonctionnement de ce circuit et dont $u(t)$ est solution. Identifier dans cette équation la pulsation propre du circuit ainsi que son coefficient d'amortissement.

2. Calculer la solution de cette équation. Pour déterminer les constantes, on pourra considérer que $i(0) = 0$.

3. Tracer la courbe représentative de $u(t)$.

4. La résistance R est désormais variable. Déterminer la valeur R_c de cette résistance qui correspond au régime critique. Déterminer les expressions de $u(t)$ et de $i(t)$ pour $R > R_c$, $R = R_c$ et pour $R < R_c$.

Conseil méthodologique

Il s'agit ici d'étudier les différents régimes auxquels est soumis le circuit. Il convient de progresser méthodiquement en considérant avec soin les conditions initiales. La réponse à la première question s'avère précieuse au moment de déterminer la solution de l'équation différentielle.

9. Régime transitoire dans une association parallèle d'un condensateur et d'une bobine ***

On considère le montage de la figure 4.11. Les valeurs de C et de L sont fixées. R est une résistance variable.

1. Calculer la valeur du courant circulant dans la bobine, une fois atteint le régime permanent.

2. Déterminer l'équation différentielle dont $u(t)$ est la solution. Discuter, en fonction de R les différents régimes de fonctionnement de ce circuit. On calculera la résistance R_c correspondant au régime critique.

3. Déterminer puis tracer les variations de $u(t)$ pour $R = \frac{R_c}{2}$. On montrera, notamment que la courbe passe par un maximum dont on déterminera les coordonnées.

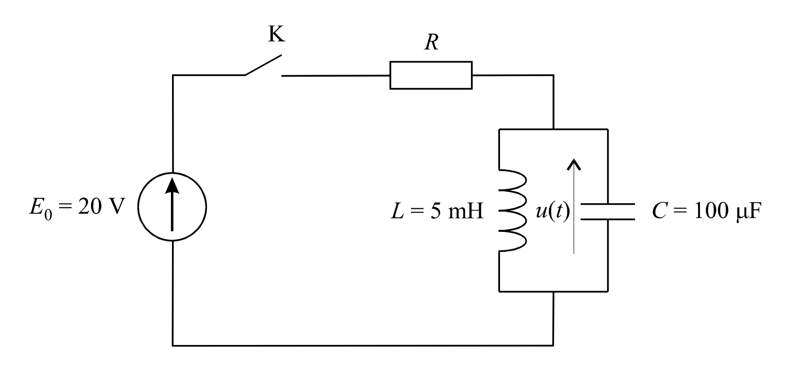


Figure 4.11

Réponses

1. Tant que l'interrupteur reste fermé ($t = 0$), on a $u(t) = 0$ puisque le condensateur est déchargé. Écrivons la loi des mailles dans l'unique maille du circuit, une fois l'interrupteur fermé :

$$E_0 = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

On a par ailleurs :

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

En dérivant cette dernière équation, on obtient :

$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i(t) \tag{4.3}$$

En utilisant les expressions (4.2) et (4.3), l'équation (4.1) devient :

$$E_0 = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) \tag{4.4}$$

Cette équation différentielle admet pour solution :

$$u(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Traçons $u(t)$ (figure 4.12) :

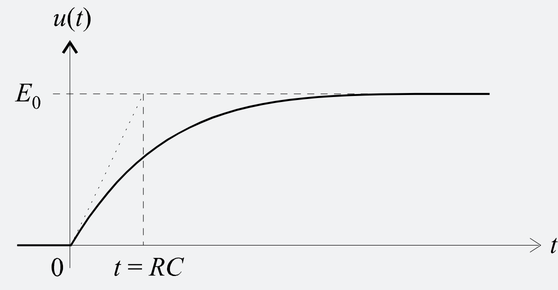


Figure 4.12

On remarquera que la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = RC$, RC représentant la constante de temps du circuit.
Le courant $i(t)$ se détermine facilement grâce à la relation (4.3) :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -CE_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right) = (-CE_0).\left(-\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC}\right) = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

La figure 4.13 présente le graphe de $i(t)$.

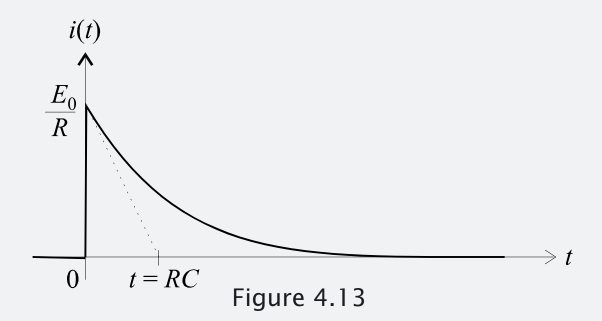


Figure 4.13

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : À la fois simple et très classique, cet exercice permet de se familiariser avec la méthode de résolution des régimes transitoires. La première étape consiste à établir l'équation différentielle dont la solution est la grandeur électrique que l'on recherche. La seconde consiste à résoudre l'équation ce qui, ici, ne pose aucune difficulté.

2. À la fermeture du circuit, la loi des mailles nous donne :

$$\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + Ri(t) = 0$$

En dérivant terme à terme, on obtient :

$$i(t) + RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

La solution de cette équation est :

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Pour déterminer la constante k, il nous faut considérer la condition aux limites $t = 0$: à cet instant, une tension U_0 est brusquement appliquée aux bornes de R. Un courant $-\frac{U_0}{R}$ apparaît donc instantanément dans le circuit.
L'orientation de i par rapport à la tension aux bornes de R nous impose la présence de ce signe moins.

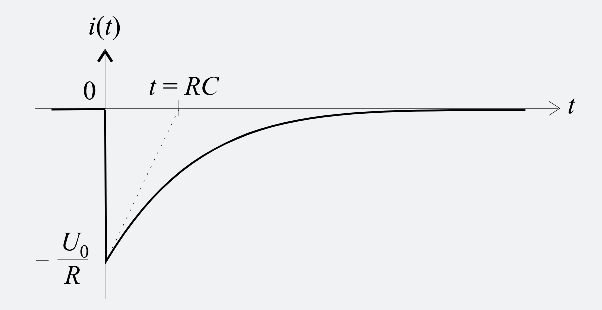


Figure 4.14

On a donc : $$i(0) = k = -\frac{U_0}{R}$$

D'où : $$i(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Le tracé de $i(t)$ est représenté sur la figure 4.14.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans cet exercice, la solution de l'équation différentielle fait intervenir une constante k qu'il faut déterminer avec soin. La connaissance de la valeur du courant à un instant donné permet de calculer cette constante. En règle générale, c'est la valeur initiale du courant qui est la plus simple à invoquer. Un raisonnement physique simple permet de le faire sans peine.

3. Plaçons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 4.15).

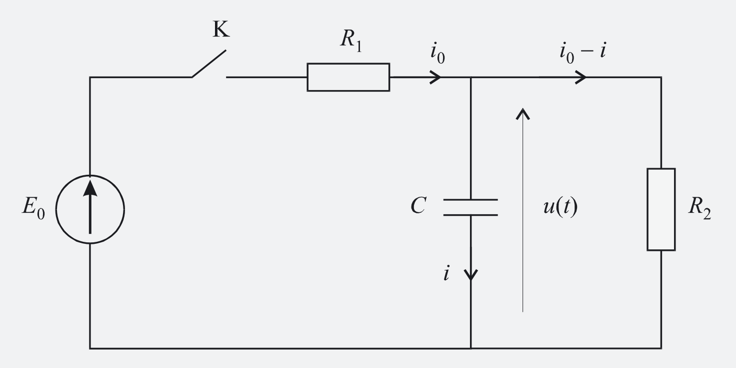


Figure 4.15

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Comme on peut s'en rendre compte dans le schéma de la figure 4.15, on fait l'économie d'une variable en écrivant directement $i_0 - i$ dans la branche contenant R_2. Par ailleurs, il est courant d'alléger l'écriture en écrivant par exemple i_0 au lieu de $i_0(t)$. Il ne faut toutefois jamais oublier que ce courant est bien variable. Son écriture en minuscule nous le rappelle.

Comme nous avons trois inconnues i_0, i et $u(t)$, nous devons impérativement écrire trois équations. On a évidemment :

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

La loi d'Ohm exprimée aux bornes des deux résistances nous fournit les deux autres équations :

$$u(t) = R_2(i_0 - i) \tag{4.6}$$

La tension aux bornes de R_1 est égale à $E_0 - v_A$, v_A étant le potentiel au point A. Or $v_A = u(t)$.

On a donc : $$E_0 - u(t) = R_1 i_0 \tag{4.7}$$

Il faut bien veiller à respecter la convention récepteur dans l'écriture de la loi d'Ohm. Ne pas oublier que v_A est variable au cours du temps même si l'on n'a pas écrit $v_A(t)$.

Grâce aux équations (4.5) et (4.7), nous tirons les expressions de i et de i_0 en fonction de $u(t)$:

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \text{ et } i_0 = \frac{E_0 - u(t)}{R_1}$$

que nous remplaçons dans l'équationé (4.6) pour obtenir l'équation différentielle dont $u(t)$ est solution :

$$u(t) = R_2\left(\frac{E_0 - u(t)}{R_1} - C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$$

Soit : $$R_2C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)u(t) = \frac{R_2}{R_1}E_0$$

Mettons cette équation sous la forme $u(t) + T\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = k$:

$$u(t) + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E_0$$

Ce qui donne :

$$u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad \text{avec} \quad T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

Le tracé de $u(t)$ est représenté sur la figure 4.16.

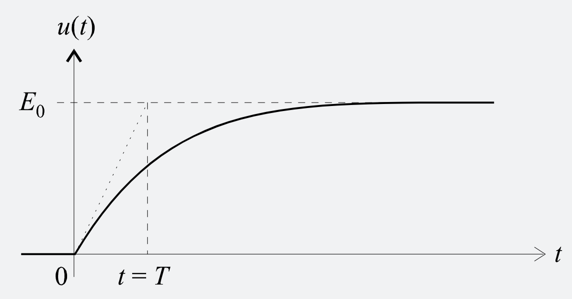


Figure 4.16

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Un peu plus complexe que les deux précédents, cet exercice montre que l'équation différentielle de fonctionnement du circuit n'est pas toujours immédiate. Il faut, pour l'obtenir, invoquer les lois élémentaires caractéristiques des différents dipôles impliqués et chercher à exprimer l'ensemble des grandeurs électriques en fonction de celle que l'on recherche.

4. À la fermeture de l'interrupteur, on applique brusquement une tension E_0 aux bornes de C : il se charge donc instantanément. De même, on applique cette tension E_0 dès la fermeture de K, aux bornes de R. Donc, à partir de $t = 0$, et tant que l'interrupteur reste fermé, on a :

$$i(t) = \text{C}^{\text{te}} = \frac{E_0}{R}$$

Lorsque l'on ouvre l'interrupteur à $t = 5$ s$t = 5$ s, le circuit devient équivalent au circuit représenté sur la figure 4.17, le condensateur C étant chargé et présentant à ses bornes une tension de 10 V.

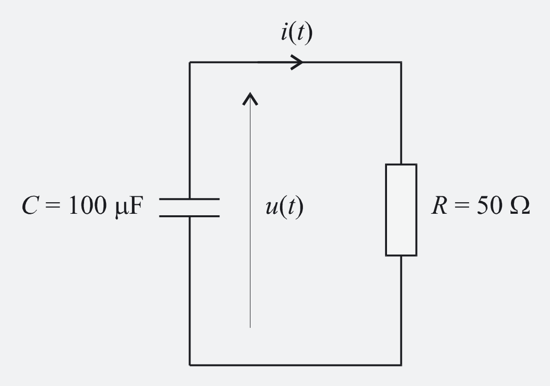


Figure 4.17

Pour plus de commodités, considérons cet instant d'ouverture de l'interrupteur comme la nouvelle origine des temps.

Écrivons les équations (très simples) de ce circuit :

$$u(t) = -\frac{1}{C} \int i(t)\mathrm{d}t \Rightarrow i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Le respect de la convention récepteur introduit un signe moins dans l'expression de $u(t)$.

De même : $u(t) = Ri(t)$

Remplaçons $i(t)$ dans cette équation :

$$u(t) + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$u(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$k = u(0) = E_0 = 10$ V puisque le condensateur est chargé et qu'il présente à ses bornes une tension initiale égale à E_0.

On tire donc : $i(t) = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

Ne pas oublier que cette expression n'est valable qu'en changeant l'origine des temps. En considérant que l'ouverture de l'interrupteur a lieu en réalité à $t = 5$ s , on a en réalité :

$$i(t) = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{(t-5)}{RC}}$$

La figure 4.18 résume l'ensemble du fonctionnement du circuit.

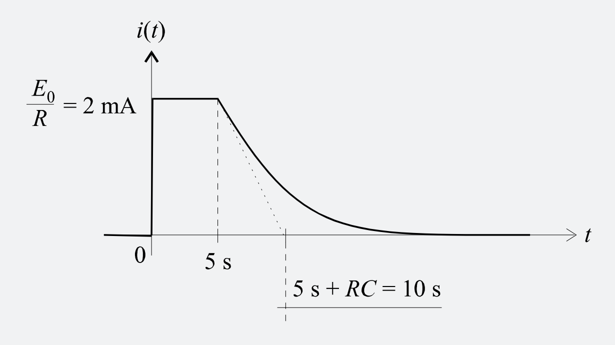


Figure 4.18

Lorsque l'on trace une courbe exponentielle décroissante, il est d'usage de représenter systématiquement la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote au point $t = T$. De plus, cette propriété constitue une aide précieuse dans le tracé de la courbe. Attention, dans cet exercice, au décalage de cette propriété, consécutif au changement d'origine.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans les problèmes où l'on étudie successivement deux régimes différents, il convient de raisonner pas à pas. On remarquera qu'il n'y a en réalité aucun transitoire à la fermeture de l'interrupteur et que le premier régime ne fait que fixer les conditions initiales du second qui lui, est un régime transitoire de décharge d'un condensateur dans une résistance.

5. À partir de l'instant $t = 0$ et tant que le commutateur reste dans la position A, le circuit est équivalent à celui représenté sur la figure 4.19.

Ce circuit est exactement le même que celui de l'exercice 4.1. On peut donc immédiatement écrire :

$$u(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1C}}\right) \tag{4.8}$$

avec : $R_1C = 20 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-6} = 2$ s

On rencontre une fois de plus ce circuit classique qui correspond à la charge d'un condensateur au travers d'une résistance.

À $t = 10$ s, on bascule le commutateur dans la position C. Notre circuit correspond à celui représenté sur la figure 4.20.

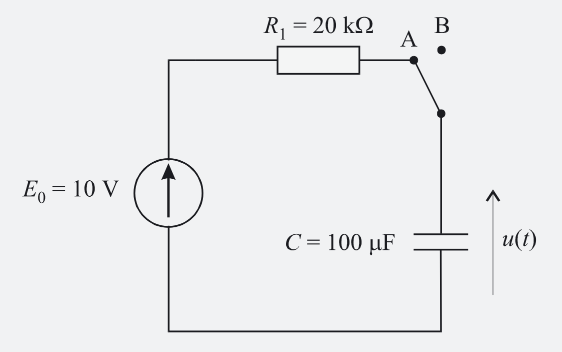


Figure 4.19

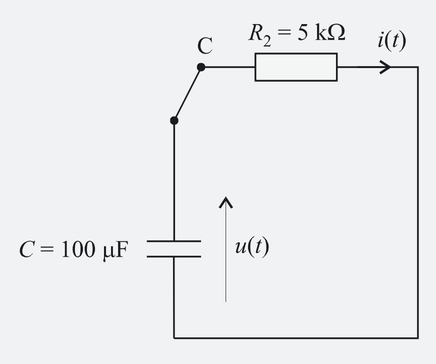


Figure 4.20

Cette fois-ci, le condensateur est chargé. Calculons la tension u_1 correspondant à cette charge. Nous pouvons, comme dans l'exercice précédent, considérer l'instant $t = 10$ s comme notre nouvelle origine des temps. La tension u_1 aux bornes de C correspond à l'expression (4.8) pour $t = 10$ s :

$$u_1 = u(10) = 10 \times \left(1 - e^{-\frac{10}{2}}\right) = 9{,}93 \text{ V}$$

Nous ne commettrons pas une très grosse erreur en considérant qu'au moment du basculement du commutateur sur C, on a en fait $u = E_0 = 10$ V. Cela revient à dire qu'au moment de cette commutation vers C, le circuit aura atteint son régime permanent.

D'après le schéma de la figure 4.20, on tire :

$$u(t) = -\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t \ \Rightarrow \ i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t) = R_2 i(t)$$

D'où :
$$u(t) + R_2 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

On en déduit :
$$u(t) = ke^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

avec :
$$k = u(0) = u_1 \approx 10 \text{ V}$$

Soit :
$$u(t) = E_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

avec :
$$R_2 C = 5 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 0{,}5 \text{ s}$$

Attention : cette expression correspond à l'évolution de $u(t)$ à partir du basculement du commutateur sur C. Ne pas oublier que nous avons changé l'origine des temps.

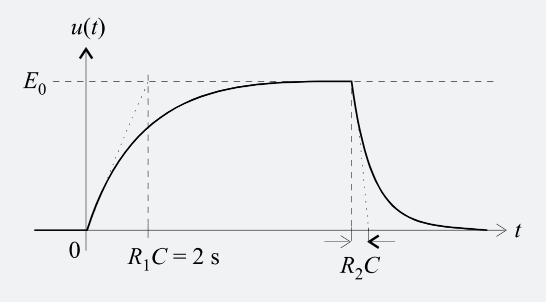


Figure 4.21

Traçons, pour conclure, l'évolution de $u(t)$ depuis le basculement initial du commutateur sur A (figure 4.21).

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice permet d'étudier la charge puis la décharge d'un condensateur au travers de deux résistances différentes. On notera la présence, par conséquent, de deux constantes de temps différentes.

6. Pour $0 \leqslant t \leqslant 3$ s, on a $u(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1C}}\right)$

Toutefois, comme le basculement du commutateur se produit à $t = 3$ s, la tension aux bornes de C n'atteindra pas sa valeur de régime permanent. En effet :

$$u(3) = 10 \times \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) = 7{,}8 \text{ V}$$

Lorsque survient le basculement du commutateur vers C, on retrouve un régime similaire à celui que nous avons observé pour ce même basculement dans l'exercice précédent, mais cette fois-ci, la tension de charge initiale du condensateur ne vaut que $u_1 = 7{,}8$ V.

En plaçant une nouvelle origine des temps à cet instant de basculement, on a :

$$u(t) = 7{,}8 \times e^{-\frac{t}{0{,}5}}$$

La figure 4.22 présente l'évolution de $u(t)$.

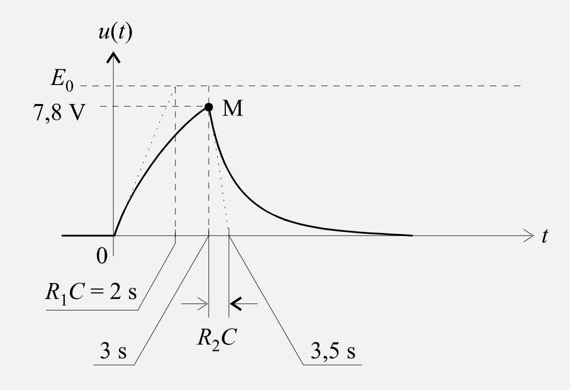


Figure 4.22

Bien remarquer que la tangente à l'origine de la décroissance exponentielle coupe toujours l'asymptote au bout d'une durée égale à la constante de temps R_2C. Cette tangente se trace à partir du point M correspondant au sommet de la courbe.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : L'unique différence entre cet exercice et le précédent correspond au fait que l'on interrompt le transitoire avant l'atteinte du régime permanent. Cela ne pose en fait aucune difficulté à condition de bien évaluer la nouvelle condition initiale.

7. La tension aux bornes de la bobine est égale à $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Par ailleurs, on a : $$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t$$

Soit : $$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

La loi des mailles dans le circuit, après fermeture de l'interrupteur, nous donne donc :

$$E_0 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t$$

Soit, en exprimant $i(t)$ en fonction de $u(t)$:

$$E_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u(t)$$

On aura donc : $$u(t) = E_0 + A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

À l'instant $t = 0$, le condensateur n'est pas chargé. La tension à ses bornes est donc nulle :

$$u(0) = E_0 + A = 0 \Rightarrow A = -E_0$$

D'où : $$u(t) = E_0 - E_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il s'agit ici d'un circuit oscillant. La seule difficulté réside dans la détermination de la constante A que l'on obtient en considérant la valeur de la tension aux bornes du condensateur à l'instant initial.

8. **a.** Exprimons la loi des mailles dans le circuit :

$$E_0 = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri(t)$$

Puisque nous cherchons $u(t)$, exprimons $i(t)$ en fonction de $u(t)$:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

L'équation différentielle devient alors :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = E_0$$

Cette équation est de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\lambda}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = E_0 \qquad (4.9)$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}4 \times 10^3\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\lambda = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 0{,}35$.

b. Comme λ est inférieur à 1, nous pouvons d'ores et déjà prévoir que le circuit fonctionne en régime oscillatoire amorti et que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$u(t) = E_0 + e^{-\lambda\omega_0 t}\left(A\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t + B\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t\right)$$

On peut également prévoir ce type de régime simplement en écrivant le polynôme caractéristique de l'équation différentielle de départ :

$$P(r) = LCr^2 + RCr + 1$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = (RC)^2 - 4LC$.
Numériquement, on a :

$$\Delta = (10 \times 50 \times 10^{-6})^2 - (4 \times 10^{-2} \times 50 \times 10^{-6}) = -1{,}75 \times 10^{-6}$$

Comme $\Delta < 0$, nous sommes bien en présence d'un régime pseudo-périodique.
Déterminons les constantes en considérant les conditions initiales du circuit : à $t = 0$, on a $u(t) = 0$, compte tenu que $u(0^-) = 0$ et que nous considérons que la tension u est continue en 0.
Soit : $$u(0) = E_0 + A = 0$$

L'expression de la condition initiale sur u ne suffit pas à déterminer les deux constantes recherchées. Nous allons donc devoir considérer la condition initiale sur le courant i.
À $t = 0$, on a : $$i(t) = 0$$

Calculons l'expression de $i(t) = C\dfrac{du}{dt}$:

$$i(t) = e^{-\lambda\omega_0 t}\left(-A\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t + B\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t\right)$$

$$-\lambda\omega_0 e^{-\lambda\omega_0 t}\left(A\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t + B\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t\right)$$

$$i(0) = 0 \;\Rightarrow\; B\omega_0\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda\omega_0 A = 0$$

Soit : $$B = \frac{\lambda A}{\sqrt{1-\lambda^2}} = -\frac{\lambda E_0}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

D'où l'expression de la tension u :

$$u(t) = E_0 - E_0 e^{-\lambda\omega_0 t}\left(\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t\right)$$

Application numérique :

$$u(t) = 10 - 10e^{-490t}[\cos 1\,311t + (0{,}37 \times \sin 1\,311t)]$$

c. La figure 4.23 présente le tracé de l'évolution de u.

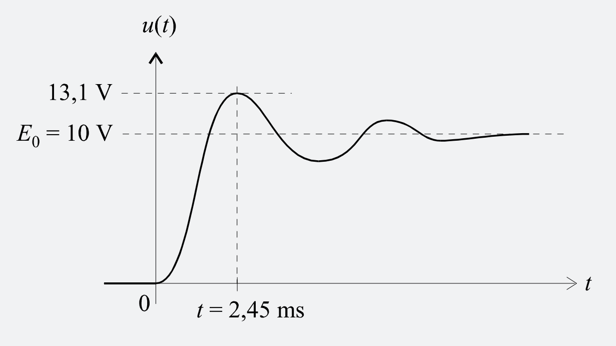


Figure 4.23

d. Nous avons déjà démontré que :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u(t) = E_0$$

et que cette équation est de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{\lambda}{\omega_0}\frac{du}{dt} + u(t) = E_0$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}4 \times 10^3\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\lambda = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

La pulsation propre du circuit ne dépend pas de R. En revanche, le facteur d'amortissement est directement influencé par la valeur de cette résistance.

La résistance critique R_c correspondant au régime critique est telle que :

$$\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 1$$

Donc :

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Application numérique :

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{10 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-6}}} = 28{,}3\ \Omega$$

- si $R = R_c$, alors $\lambda = 1$. Le circuit fonctionne en régime critique :

$$u(t) = E_0 + (At + B)\,e^{-\omega_0 t}$$

Les constantes A et B se déterminent grâce aux conditions initiales :

$$u(0) = 0 \ \Rightarrow\ E_0 + (B) = 0 \ \Rightarrow\ B = -E_0$$

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = Be^{-\omega_0 t} - \omega_0\,(At + B)\,e^{-\omega_0 t}$$

D'où :

$$i(0) = 0 \ \Rightarrow\ A - \omega_0 B = 0 \ \Rightarrow\ A = -\omega_0 E_0$$

Donc :

$$u(t) = E_0 - E_0\,(\omega_0 t + 1)\,e^{-\omega_0 t}$$

- si $R < R_c$, alors $\lambda < 1$. Le régime sera pseudo-périodique.
Ce régime correspond à l'expression générale trouvée au cours de l'exercice précédent :

$$u(t) = E_0 - E_0 e^{-\lambda\omega_0 t}\left(\cos \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t\right)$$

- si $R > R_c$, alors $\lambda > 1$. Le régime sera amorti.

On a donc :

$$u(t) = E_0 + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Avec :

$$\begin{cases} r_1 = \omega_0\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) \\ r_2 = \omega_0\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) \end{cases}$$

Les constantes A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales :

$$u(0) = 0 \;\Rightarrow\; E_0 + A + B = 0$$

Par ailleurs :
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = r_1 A e^{r_1 t} + r_2 B e^{r_2 t}$$

D'où :
$$i(0) = 0 \;\Rightarrow\; r_1 A + r_2 B = 0$$

Soit :
$$r_1 A - r_2 (E_0 + A) = 0 \;\Rightarrow\; A = \frac{r_2 E_0}{r_1 - r_2}$$

et
$$B = -E_0 - A = -E_0 - \frac{r_2 E_0}{r_1 - r_2}$$

En remplaçant r_1 et r_2 par leurs expressions :

$$u(t) = E_0 + E_0\left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}}{2\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)e^{\left[\omega_0\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)\right]t}$$

$$-E_0\left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{2\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)e^{\left[\omega_0\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)\right]t}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans un circuit RLC, le régime transitoire dépend essentiellement du coefficient d'amortissement. Il convient, en tout premier lieu, de déterminer le type de réponse du circuit avant de tenter de résoudre l'équation différentielle du second degré. Dans certains cas, la détermination des constantes n'est pas facile. Il est en effet nécessaire, très souvent, de connaître les conditions initiales de plusieurs grandeurs électriques.

9.

a. Appelons $i(t)$ le courant circulant dans la résistance R, $i_1(t)$ le courant dans le condensateur, et $i_2(t)$ le courant dans la bobine (figure 4.24).

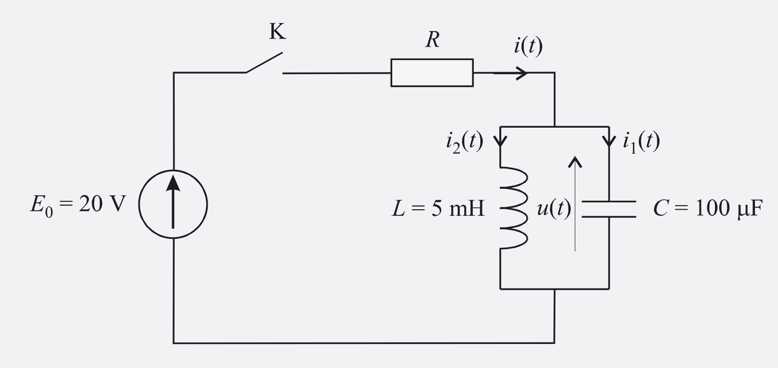


Figure 4.24

Le fonctionnement de ce circuit correspond à un régime transitoire qui va tendre vers un régime permanent de type continu. Lorsque le régime permanent est atteint, aucun courant ne peut plus circuler dans le condensateur. La bobine se comporte comme un simple court-circuit. Un courant $\frac{E_0}{R}$ va alors circuler dans le circuit, donc dans la bobine.

On en déduit donc :
$$\lim_{t\to+\infty} i_2(t) = \frac{E_0}{R}$$

b. La loi des nœuds nous donne immédiatement :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Or : $$E_0 = Ri(t) + u(t) \;\Rightarrow\; i(t) = \frac{E_0 - u(t)}{R}$$

Par ailleurs : $$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

et $$i_1(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

En dérivant cette expression, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$

Nous pouvons également dériver l'équation fournie par la loi des nœuds :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

D'où : $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E_0 - u(t)}{R}\right) = C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u(t)}{L}$$

Soit : $$C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{L} = 0$$

Ou encore : $$LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$$

qui peut être mis sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$$

Avec : $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On remarquera que la pulsation propre ne dépend pas de R dans ce circuit, mais il ne faut surtout pas croire qu'il s'agit d'un cas général. En l'occurrence, seul le facteur d'amortissement est influencé par le choix de la résistance.

On peut donc calculer la pulsation propre :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-6}}} = 1{,}41 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

En fonction des valeurs de λ, le circuit fonctionnera selon trois régimes possibles :

- si $\lambda = 1$, nous sommes en présence du régime critique.

  On a : $$\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 1 \;\Rightarrow\; R_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

  Application numérique :

  $$R_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-6}}}$$
  $$R_c = 3{,}5\ \Omega$$

- si $R < R_c$, alors $\lambda > 1$. Le régime sera amorti.
- si $R > R_c$, alors $\lambda < 1$. Le régime sera pseudo-périodique.

c. En choisissant $R = \dfrac{R_c}{2} = 1{,}75\,\Omega$, nous sommes donc en présence d'un régime amorti. La valeur du facteur d'amortissement est :

$$\lambda = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2 \times 1{,}75}\sqrt{\frac{5 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-6}}} = 2$$

La solution de l'équation différentielle a donc pour expression :

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec :

$$\begin{cases} r_1 = \omega_0\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) \\ r_2 = \omega_0\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} r_1 = 1{,}41 \times 10^3 \times \left(-2 + \sqrt{3}\right) = -3{,}8 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ r_2 = 1{,}41 \times 10^3 \times \left(-2 - \sqrt{3}\right) = -5{,}3 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

On remarquera que les deux racines sont bien homogènes à des pulsations, compte tenu que λ est sans dimension.

Les constantes A et B s'obtiennent en considérant les conditions initiales. Pour $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé, on a :

$$u(t) = 0$$

étant donné qu'il se charge au travers d'une résistance (il ne peut pas y avoir discontinuité de la valeur de la tension aux bornes du condensateur dans ce cas).

Soit : $$A + B = 0$$

La seule condition initiale sur u ne suffit pas à déterminer les deux constantes. Comme pour les exercices précédents, nous devons également considérer les conditions aux limites du courant.

Nous savons déjà que : $$i(t) = \frac{E_0 - u(t)}{R}$$

D'où : $$i(0) = \frac{E_0 - u(0)}{R} = \frac{E_0}{R}$$

Attention : les conditions initiales ne sont pas toujours nulles.

Calculons donc le courant $i(t)$ afin de tenter d'appliquer cette condition initiale :

$$i(t) = \frac{E_0 - u(t)}{R} = \frac{E_0 - Ae^{r_1 t} - Be^{r_2 t}}{R}$$

D'où : $$i(0) = \frac{E_0 - A - B}{R} = \frac{E_0}{R} \quad \Rightarrow \quad A + B = 0$$

Ce qui ne nous donne aucune information supplémentaire.

Nous devons donc essayer de déterminer la valeur initiale du courant i_1 ou i_2.

L'équation :
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

traduit le fait que la tension u est la dérivée du courant i_2. Or nous savons déjà que la tension u est nulle pour $t = 0$.

La tangente en $t = 0$ de la fonction i_2 est donc horizontale. Il n'y a pas de discontinuité en 0. On peut donc considérer que :
$$i_2(0) = 0$$

Or :
$$i_2(t) = \frac{1}{L}\int u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int \left(Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}\right)\mathrm{d}t$$

Soit :
$$i_2(t) = \frac{A}{Lr_1}e^{r_1 t} + \frac{B}{Lr_2}e^{r_2 t} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

La constante d'intégration se détermine en posant :
$$\lim_{t\to+\infty} i_2(t) = \frac{E_0}{R}$$

Puisque r_1 et r_2 sont tous les deux négatifs, on obtient :
$$\lim_{t\to+\infty} i_2(t) = \frac{E_0}{R} = \left(\frac{A}{Lr_1}\times 0\right) + \left(\frac{B}{Lr_2}\times 0\right) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Soit :
$$\mathrm{C}^{\mathrm{te}} = \frac{E_0}{R}$$

D'où :
$$i_2(t) = \frac{A}{Lr_1}e^{r_1 t} + \frac{B}{Lr_2}e^{r_2 t} + \frac{E_0}{R}$$

Comme $i_2(0) = 0$, on tire :
$$\frac{A}{Lr_1} + \frac{B}{Lr_2} + \frac{E_0}{R} = 0$$

Comme $A = -B$, on a :
$$\frac{-B}{Lr_1} + \frac{B}{Lr_2} + \frac{E_0}{R} = 0$$
$$B\left(\frac{-1}{Lr_1} + \frac{1}{Lr_2}\right) = -\frac{E_0}{R}$$

D'où :
$$B = \frac{LE_0}{R}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)$$

Donc :
$$A = -\frac{LE_0}{R}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)$$

En conclusion :
$$u(t) = -\frac{LE_0}{R}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)e^{r_1 t} + \frac{LE_0}{R}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)e^{r_2 t}$$

Ou encore :
$$u(t) = \frac{LE_0}{R}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)\left(e^{r_2 t} - e^{r_1 t}\right)$$

Application numérique :
$$u(t) = 23{,}4 \times \left(e^{\left[-3{,}8\times 10^2\right]t} - e^{\left[-5{,}3\times 10^3\right]t}\right)$$

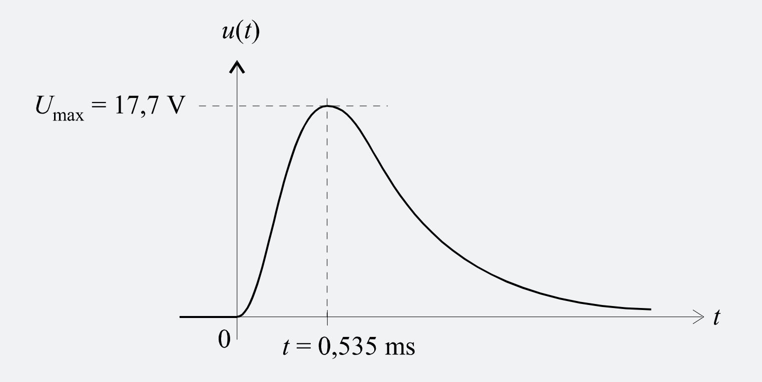


Figure 4.25

La figure 4.25 représente le tracé sommaire de la tension u.

Il peut être intéressant d'étudier sommairement quelques particularités de cette courbe. On remarquera notamment la valeur pour $t = 0$ et la limite en $+\infty$:

$$u(0) = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$$

Par ailleurs :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 23{,}4 \times \left(-3{,}8 \times 10^2 e^{[-3{,}8\times10^2]t} + 5{,}3 \times 10^3 e^{[-5{,}3\times10^3]t}\right)$$

Il est donc facile de rechercher d'éventuels extrema en posant :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; \left(-3{,}8 \times 10^2 e^{[-3{,}8\times10^2]t} + 5{,}3 \times 10^3 e^{[-5{,}3\times10^3]t}\right) = 0$$

La tension u présente donc un maximum à l'instant t tel que :

$$\frac{e^{[-3{,}8\times10^2]t}}{e^{[-5{,}3\times10^3]t}} = \frac{5{,}3 \times 10^3}{3{,}8 \times 10^2}$$

D'où : $$e^{[5\,300-380]t} = 13{,}95$$

Il ne peut pas s'agir d'un minimum puisque la tension u ne saurait être négative dans un circuit alimenté par une tension positive.

Soit : $$t = \frac{\ln(13{,}95)}{4\,920} = 0{,}535 \text{ ms}$$

À cet instant, la tension u atteint son maximum :

$$U_{max} = u(0{,}535 \times 10^{-3}) = 17{,}7 \text{ V}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Une fois déterminée l'équation différentielle du second degré régissant le fonctionnement du montage, il convient d'identifier les paramètres (notamment le coefficient d'amortissement) permettant de déterminer le type de réponse du circuit. On remarquera tout l'intérêt d'avoir préalablement déterminé la valeur finale du courant dans la bobine, valeur qui s'avère utile dans le calcul des constantes.

Puissance et énergie électriques

5

Mots-clés

▪ puissance instantanée ▪ puissance moyenne ▪ énergie ▪ valeur efficace ▪ conservation de l'énergie ▪ puissance en régime continu ▪ puissance en régime sinusoïdal ▪ facteur de puissance ▪ puissance complexe ▪ puissance active ▪ puissance réactive ▪ puissance apparente

Les systèmes électriques produisent, transportent ou consomment de l'énergie. La notion de puissance, intimement liée à celle d'énergie, revêt donc un aspect fondamental dans l'étude des circuits. Que ce soit en régime continu ou en régime sinusoïdal, il s'agit souvent de dimensionner correctement les dispositifs qui alimentent les circuits ou encore les éléments mêmes de ces circuits. De même, les régimes transitoires peuvent aussi être le siège de phénomènes mettant en jeu l'énergie échangée entre différents composants d'un même circuit. Ce chapitre aborde les notions essentielles permettant d'évaluer les puissances mises en jeu dans les systèmes électriques.

Définitions

1. Puissance instantanée

La puissance instantanée consommée par un dipôle électrique récepteur (figure 5.1), quel que soit le régime de fonctionnement, est définie par :

$$p(t) = e(t) \cdot i(t) \tag{5.1}$$

Dans le cas d'un dipôle générateur (figure 5.2), l'expression de la puissance instantanée délivrée reste $p(t) = e(t) \cdot i(t)$. Quel que soit le cas, la puissance instantanée s'exprime en watts (W).

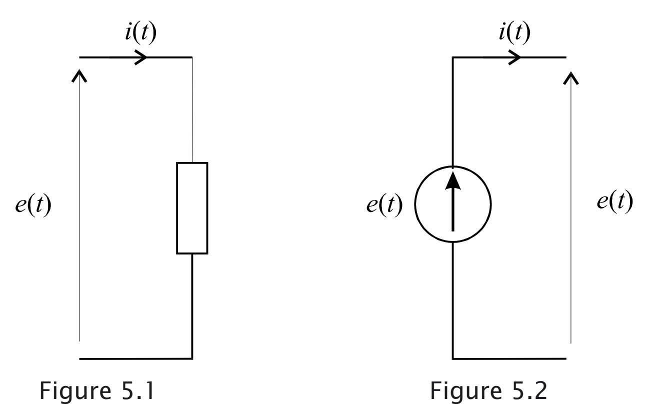


Figure 5.1 Figure 5.2

2. Énergie dans un dipôle

La notion d'énergie ne peut en aucun cas correspondre à une grandeur instantanée. Elle représente, en quelque sorte, sur un intervalle de temps $[t_1; t_2]$ donné, la sommation de toutes les puissances instantanées.

Ainsi, l'énergie, en joules (J) consommée par un dipôle récepteur (ou délivrée par un générateur) sur un intervalle de temps $[t_1; t_2]$ est :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} e(t)i(t)\mathrm{d}t \tag{5.2}$$

3. Puissance moyenne

La puissance moyenne consommée sur un intervalle de temps $[t_1; t_2]$ par un dipôle récepteur ou délivrée par un dipôle générateur (figures 5.1 et 5.2) est :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)\mathrm{d}t = \frac{E}{t_2 - t_1} \tag{5.3}$$

Cette puissance moyenne s'exprime, comme la puissance instantanée, en watts. La puissance moyenne consommée sur une durée infinie (de $-\infty$ à $+\infty$) se calcule ainsi :

$$\langle P \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e(t)i(t)\mathrm{d}t$$

Pour le calcul de la puissance moyenne consommée entre les instants 0 et $+\infty$, on utilisera l'expression :

$$\langle P \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e(t)i(t)\mathrm{d}t$$

4. Principe de la conservation de l'énergie

Dans un circuit électrique formé de *n* dipôles récepteurs et de *p* dipôles générateurs, quel que soit le régime de fonctionnement, la somme des puissances ou des énergies fournies par l'ensemble des générateurs est égale à la somme des puissances ou énergies consommées par l'ensemble des dipôles récepteurs.

Fiche 2

Puissance en régime continu

Un circuit linéaire en régime continu ne comporte en général que des générateurs de tension ou de courant et des résistances. Dans ce régime de fonctionnement, les tensions et courants dans tout le circuit sont constants.

Ainsi, la puissance instantanée consommée par une résistance en régime continu (figure 5.3) est constante et égale à sa valeur moyenne :

$$p(t) = UI = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = \langle P \rangle$$

Comme $I = \dfrac{U}{R}$, on a : $p(t) = \langle P \rangle = \dfrac{U^2}{R} = RI^2$

De même, la puissance délivrée par un générateur de tension (figure 5.4) est constante et on a :

$$p(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = \langle P \rangle = UI$$

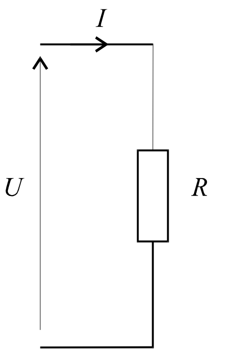


Figure 5.3

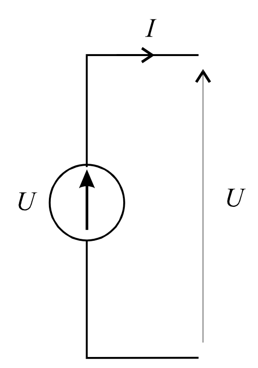


Figure 5.4

Puissance en régime sinusoïdal

1. Valeur efficace d'une tension ou d'un courant sinusoïdal

Une tension sinusoïdale d'expression $e(t) = E_0 \cos \omega t$, débitant dans une résistance R, délivre une puissance instantanée :

$$p(t) = \frac{(E_0 \cos \omega t)^2}{R}$$

Soit la puissance moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(E_0 \cos \omega t)^2}{R} \mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{2R}$$

La source de tension continue qui délivrerait la même puissance moyenne aurait pour valeur $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$. On décide d'appeler *valeur efficace* d'une tension sinusoïdale, et on note $E_{\text{eff}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$, la valeur de la tension continue correspondant à la même puissance moyenne délivrée.

Il en est de même pour un courant sinusoïdal. Ainsi, on peut écrire :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$$
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

2. Expression de la puissance consommée par un dipôle

Pour un dipôle électrique récepteur fonctionnant en régime sinusoïdal (figure 5.5), on peut remplacer $e(t)$ et $i(t)$ dans les expressions 5.1, 5.2 et 5.3.

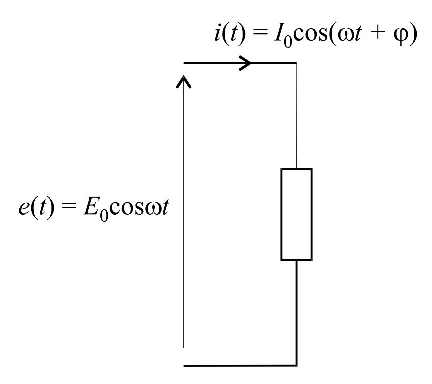


Figure 5.5

On obtient ainsi : $p(t) = E_0 I_0 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ Soit : $p(t) = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi + E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(2\omega t + \varphi)$(5.4)

La puissance moyenne se calcule sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \mathrm{d}t = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \qquad (5.5)$$

La quantité $E_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ s'appelle la *puissance apparente* consommée par le dipôle.

La quantité $\cos\varphi$ s'appelle le *facteur de puissance*. Comme le déphasage entre le courant et la tension, dépend à la fois de la pulsation ω et du dipôle, on remarquera que la valeur de la puissance moyenne consommée peut être fortement influencée par le type de dipôle alimenté, ainsi que par le choix de la pulsation d'alimentation.

On se souviendra que ce déphasage φ n'est rien d'autre que l'opposé de l'argument de l'impédance complexe du dipôle (voir rappels de cours du chapitre 3).

Ainsi, pour une résistance R : $\varphi = 0$. On a alors :

$$\langle P \rangle = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2$$

Pour une inductance pure ou pour un condensateur, on aura : $\varphi = \pm \dfrac{\pi}{2}$.

D'où :

$$\langle P \rangle = 0$$

3. Puissance complexe

Afin de disposer d'un modèle de puissance en relation avec les modèles complexes des circuits, tels que nous les avons abordés au chapitre 3, on définit une notion de puissance complexe : $\overline{P} = \overline{E} \cdot \overline{I}^*$

avec :

$$\overline{E} = E_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad \overline{I}^* = I_{\text{eff}} e^{-j\varphi}, \quad \text{conjugué de} \quad \overline{I} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

On montre facilement que :

$$\overline{P} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{-j\varphi} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi - j E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi$$

Soit encore :

$$\overline{P} = P_{\text{a}} - j P_{\text{r}}$$

où P_{a}, dite *puissance active*, correspond à la puissance moyenne consommée dans le dipôle : $P_{\text{a}} = \langle P \rangle$, et où P_{r}, dite *puissance réactive*, correspond à la puissance échangée entre la source et les éléments non résistifs du dipôle, sans qu'il y ait, en moyenne, de consommation de puissance.

4. Puissance en régime quelconque

Pour évaluer énergie ou puissance consommées ou délivrées par un dipôle en régime quelconque (en réalité il s'agit très souvent d'un régime transitoire), on est amené, la plupart du temps, à effectuer les calculs des expressions 5.1, 5.2 ou 5.3, à partir des expressions des tensions et courants en fonction du temps, $e(t)$ et $i(t)$.

Pour calculer, notamment, l'énergie totale consommée par un dipôle au cours d'un régime transitoire, on utilisera l'expression suivante :

$$E = \int_0^{+\infty} e(t) i(t) \mathrm{d}t$$

On considérera toujours que le régime transitoire a en théorie une durée infinie.

Entraînement

QCM

1. **La puissance moyenne dissipée en régime continu dans une résistance $R = 100\ \Omega$ soumise à une tension $U = 10$ V est égale à :**

❑ a. 1 W
❑ b. 1000 W
❑ c. 10^5 W
❑ d. 0, 1 W

2. **La puissance moyenne dissipée en régime continu dans une résistance $R = 50\ \Omega$ parcourue par un courant $I = 2$ A est égale à :**

❑ a. 25 W
❑ b. 12, 5 W
❑ c. 200 W
❑ d. 100 W

3. **Un générateur de tension continue parfait $U = 100$ V est placé aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 200\ \mu$F. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur ?**

❑ a. 1 J
❑ b. 2 J
❑ c. 20 mJ
❑ d. 200 mJ

4. **Un générateur de tension continue parfait $U = 10$ V est placé aux bornes d'un dipôle constitué de la mise en série d'une résistance $R = 5\ \Omega$ et d'un condensateur de capacité $C = 200\ \mu$F. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur une fois que celui-ci est complètement chargé ?**

❑ a. 0 J
❑ b. 20 mJ
❑ c. 2 J
❑ d. 10 mJ

5. **Un générateur de tension continue parfait $U = 10$ V est placé aux bornes d'une résistance variable R. La puissance maximale délivrée par le générateur est $P_{max} = 1$ W. Quelle condition doit remplir la résistance R pour que le générateur reste dans sa zone de fonctionnement ?**

❑ a. $R < 1\ \Omega$
❑ b. $R > 1\ \Omega$
❑ c. $R > 100\ \Omega$
❑ d. $R < 100\ \Omega$

6. **Un générateur de tension continue réel caractérisé par $U = 10$ V et $r = 2\ \Omega$ alimente une résistance $R = 9\ \Omega$. Quelle est la valeur de la puissance moyenne absorbée par la résistance interne r du générateur ?**

❑ a. 2 W
❑ b. 1, 38 W
❑ c. 1 W
❑ d. 10 W

7. **Une source de tension sinusoïdale parfaite $e(t) = E_0 \cos \omega t$ avec $E_0 = 20$ V alimente un dipôle formé de l'association en série d'une résistance $R = 10\ \Omega$ et d'un condensateur de capacité $C = 100\ \mu$F. Quelle est la valeur de la puissance moyenne dissipée par la résistance ?**

❑ a. 20 W ❑ c. 10 W
❑ b. 40 W ❑ d. 5 W

8. **Une source de tension sinusoïdale parfaite $e(t) = E_0 \cos \omega t$ avec $E_0 = 20$ V alimente un dipôle formé de l'association en série d'une résistance $R = 10\ \Omega$ et d'une bobine d'auto-inductance $L = 10$ mH. Quelle est la valeur de la puissance moyenne fournie par le générateur ?**

❑ a. 20 W ❑ c. 10 W
❑ b. 40 W ❑ d. 5 W

9. **Un dipôle est formé de l'association en série d'une résistance $R_1 = 10\ \Omega$ et d'un condensateur de capacité $C = 50\ \mu$F. On place ce dipôle en parallèle avec une résistance $R_2 = 40\ \Omega$ et on alimente l'ensemble avec une source de tension sinusoïdale parfaite $e(t) = E_0 \cos \omega t$ avec $E_0 = 15$ V. Quelle est la valeur de la puissance moyenne fournie par le générateur ?**

❑ a. 1 W ❑ c. 28 W
❑ b. 14 W ❑ d. 7 W

10. **Une source de tension continue parfaite E_0 alimente, par l'intermédiaire d'un interrupteur, un dipôle formé de l'association en série d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Quelle est l'expression de la puissance instantanée délivrée par le générateur ?**

❑ a. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{2R} e^{-\frac{2t}{RC}}$ ❑ c. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$
❑ b. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{2R} e^{-\frac{t}{RC}}$ ❑ d. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$

11. **Une source de tension continue parfaite E_0 alimente, par l'intermédiaire d'un interrupteur, un dipôle formé de l'association en série d'une résistance R et d'une bobine d'auto-inductance L. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Quelle est l'expression de la puissance instantanée délivrée par le générateur ?**

❑ a. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{Lt}{R}}\right)$ ❑ c. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{2R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$
❑ b. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{2R} \left(1 - e^{-\frac{Lt}{R}}\right)$ ❑ d. $p(t) = \dfrac{E_0^2}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

Réponses

1. **a.** La puissance dissipée dans une résistance en régime continu s'exprime simplement par la relation $P = \frac{U^2}{R} = \frac{10^2}{100} = 1$ W.

2. **c.** La puissance dissipée dans une résistance en régime continu s'exprime simplement par la relation $P = RI^2 = 50 \times 2^2 = 200$ W.

3. **a.** L'énergie emmagasinée dans un condensateur dépend de sa capacité et de la tension à ses bornes selon l'expression : $\frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-6} \times 100^2 = 1$ J.

4. **d.** Lorsque le condensateur est complètement chargé, plus aucun courant ne circule dans le circuit et la différence de potentiels aux bornes de la résistance et donc nulle. Aux bornes du condensateur, on retrouve la tension U. L'énergie qu'il a emmagasinée est donc : $\frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-6} \times 10^2 = 10$ mJ.

5. **c.** Connaissant la puissance maximale supportée par le générateur et celui-ci délivrant une tension constante, on en déduit que l'intensité du courant doit rester inférieure à une valeur $I_{\max} = \frac{P_{\max}}{U} = \frac{1}{10} = 100$ mA. La résistance Rdoit donc être supérieure à la valeur $R_{\min}$ de R qui correspond à ce courant, soit $R_{\min} = \frac{U}{I_{\max}} = \frac{10}{0,1} = 100\ \Omega$. D'où $R > 100\ \Omega$.

6. **b.** En fermant l'interrupteur, on applique immédiatement une tension E aux bornes de la résistance et aux bornes du condensateur. Ce dernier se charge donc instantanément et se comporte ensuite comme un circuit ouvert. Le circuit se réduit alors à l'alimentation de la résistance R par le générateur. On a donc immédiatement $i(t) = \frac{E}{R}$.

7. **a.** Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est complètement chargé et se comporte comme un circuit ouvert. Aucun courant ne peut plus circuler dans le circuit. La tension aux bornes de la résistance est donc nulle.

8. **a.** Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est complètement chargé et se comporte comme un circuit ouvert. Aucun courant ne peut plus circuler dans le circuit. La tension aux bornes de la résistance est donc nulle.

9. **a.** Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est complètement chargé et se comporte comme un circuit ouvert. Aucun courant ne peut plus circuler dans le circuit. La tension aux bornes de la résistance est donc nulle.

10. **c.** Soit $i(t)$ le courant circulant dans l'unique maille du circuit à partir de $t = 0$ et soit $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. On a $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. La loi des mailles nous donne : $E_0 = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t)$. D'où $u(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$, soit $i(t) = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.
La puissance instantanée fournie par le générateur est égale au produit de ce courant par la tension qu'il délivre : $p(t) = E_0 i(t) = \frac{E_0^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.

11. **d.** Soit $i(t)$ le courant circulant dans l'unique maille du circuit à partir de $t = 0$. La loi des mailles nous donne : $E_0 = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ou encore $\frac{E_0}{R} = i(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. D'où $i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$.
La puissance instantanée fournie par le générateur est égale au produit de ce courant par la tension qu'il délivre : $p(t) = E_0 i(t) = \frac{E_0^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$.

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. En régime continu, la puissance moyenne et la puissance instantanée fournies par un générateur sont égales.	☐	☐
2. L'énergie consommée par un dipôle doit toujours être évaluée sur un intervalle de temps donné.	☐	☐
3. Un dipôle passif parcouru par un courant $i(t)$ et aux bornes duquel est appliqué une tension $e(t)$ consomme à l'instant t une puissance $p(t) = e(t)i(t)$.	☐	☐
4. Une tension continue U est appliquée aux bornes de l'association série de deux résistances R_1 et R_2. La somme des puissances consommées par chacune des résistances est égale à la puissance qui serait consommée dans la résistance équivalente $R_1 + R_2$.	☐	☐
5. Une tension continue U est appliquée aux bornes de l'association parallèle de deux résistances R_1 et R_2. La somme des puissances consommées par chacune des résistances est égale à la puissance qui serait consommée dans la résistance équivalente $\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$.	☐	☐
6. Une résistance R est alimentée par un dispositif formé de deux générateurs de tension parfaits associés en série, E_1 et E_2. La puissance consommée par la résistance R est égale à la somme des puissances qu'elle consommerait si elle était alimentée par E_1 seule puis par E_2 seule.	☐	☐
7. L'amplitude d'une tension sinusoïdale correspond à la valeur d'une tension continue qui délivrerait la même puissance moyenne.	☐	☐
8. La puissance instantanée consommée par un dipôle d'impédance complexe $\bar{Z} = Ze^{j\varphi}$ parcouru par un courant d'intensité efficace I_{eff} et soumis à une tension E_{eff} a pour expression $E_{eff}I_{eff}\cos\varphi$.	☐	☐
9. La puissance moyenne consommée par un dipôle en régime sinusoïdal est sa puissance réactive.	☐	☐
10. La puissance instantanée fournie par un générateur sinusoïdal alimentant un dipôle quelconque est toujours inférieure à la puissance active consommée par le dipôle.	☐	☐
11. Un générateur sinusoïdal alimente un dipôle formé de l'association en série d'une résistance R et d'une bobine d'auto-inductance L. Le facteur de puissance $\cos\varphi$ étant jugé trop faible, on peut placer un condensateur en parallèle avec le dipôle de manière à obtenir $\cos\varphi = 1$.	☐	☐
12. L'énergie emmagasinée sur une demi-période par un condensateur alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos\omega t$ et parcouru par un courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est égale à $\frac{2}{T}\int_0^{T/2} e(t)i(t)\mathrm{d}t$.	☐	☐
13. Un générateur de tension sinusoïdale ne fournit pas de puissance réactive à un dipôle.	☐	☐

14. L'énergie consommée par un dipôle au cours d'un régime transitoire de premier ordre de constante de temps τ a pour expression : $\int_0^\tau e(t)i(t)\mathrm{d}t$. ☐ ☐

15. La puissance moyenne consommée par une bobine en régime sinusoïdal est nulle. ☐ ☐

16. Le facteur de puissance d'un dipôle en régime sinusoïdal est indépendant de la pulsation de la source d'alimentation. ☐ ☐

Réponses

1. **Vrai.** En régime continu, la puissance instantanée fournie par un générateur est constante et est donc égale à sa valeur moyenne.

2. **Vrai.** Si la puissance est à la base une grandeur instantanée, l'énergie correspond à la manière dont cette puissance se déploie en fonction du temps. Il n'existe donc pas de notion d'énergie instantanée. L'énergie ne peut être calculée que sur une durée donnée.

3. **Vrai.** Il s'agit là de la définition de la notion de puissance instantanée consommée par un dipôle.

4. **Vrai.** Le courant parcourant les deux résistances a pour expression $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$. La résistance R_1 consomme donc une puissance égale à $P_1 = R_1 I^2 = \dfrac{R_1 U^2}{(R_1 + R_2)^2}$ et la résistance R_2consomme une puissance égale à $P_2 = R_2 I^2 = \dfrac{R_2 U^2}{(R_1 + R_2)^2}$. La puissance totale consommée par l'association en série est donc égale à : $P_1 + P_2 = \dfrac{(R_1 + R_2)\, U^2}{(R_1 + R_2)^2} = \dfrac{U^2}{R_1 + R_2}$, expression qui correspond bien à la puissance consommée dans la résistance équivalente $(R_1 + R_2)$.

5. **Vrai.** Comme la tension U règne aux bornes de chacune des deux résistances, les puissances consommées par chaque résistance vaut : $P_1 = \dfrac{U^2}{R_1}$ et $P_2 = \dfrac{U^2}{R_2}$. D'où une puissance totale consommée égale à $P_1 + P_2 = \dfrac{U^2}{R_1} + \dfrac{U^2}{R_2} = \dfrac{(R_1 + R_2)\, U^2}{R_1 R_2}$. La résistance équivalente à l'association en parallèle des deux résistances a pour expression $R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}$. On a bien $P_1 + P_2 = \dfrac{U^2}{R_{eq}}$.

6. **Faux.** En présence de la source E_1 seule, la résistance R consomme une puissance égale à $P_1 = \dfrac{E_1^2}{R}$. De même, en présence de la source E_2 seule, la résistance R consomme une puissance égale à $P_2 = \dfrac{E_2^2}{R}$. La somme des deux nous donne : $P_1 + P_2 = \dfrac{E_1^2}{R} + \dfrac{E_2^2}{R} = \dfrac{E_1^2 + E_2^2}{R}$. En présence des deux sources simultanées, la puissance consommée par R a pour expression $P = \dfrac{(E_1 + E_2)^2}{R} \neq P_1 + P_2$. On démontre bien ici que le principe de superposition ne s'applique pas aux puissances. Cela est dû au fait que la puissance n'est pas une forme linéaire mais une forme quadratique.

7. **Faux.** C'est la définition de la valeur efficace de la tension sinusoïdale.

8. **Faux.** C'est la définition de la puissance moyenne.

9. **Faux.** La puissance moyenne correspond à la puissance active.

10. **Faux.** En considérant l'expression $p(t) = E_{eff} I_{eff} \cos\varphi + E_{eff} I_{eff} \cos(2\omega t + \varphi)$ et étant entendu que l'expression $E_{eff} I_{eff} \cos\varphi$ correspond à la puissance active, on note que $p(t)$ est tantôt supérieure, tantôt inférieure à la puissance active puisque le deuxième terme est tantôt positif et tantôt négatif.

11. **Vrai.** (Voir exercice 5.15) C'est ce que l'on appelle l'ajustement du facteur de puissance.

12. **Faux.** L'expression qui est donnée est celle de la puissance moyenne consommée par le condensateur sur la demi-période. L'énergie consommée est $\displaystyle\int_0^{T/2} e(t) i(t) \mathrm{d}t$. Attention à ne pas confondre les deux définitions.

13. **Faux.** En fait, ce n'est vrai que si on considère la puissance moyenne étant donné que la puissance réactive est en moyenne nulle. Mais c'est effectivement faux si on considère la puissance instantanée.

14. **Faux.** En théorie, un régime transitoire de premier ordre possède une durée infinie. Il faut donc intégrer de 0 à l'infini. L'énergie consommée par le dipôle a pour expression : $\int_0^\infty e(t)i(t)\mathrm{d}t$.

15. **Vrai si** la bobine est parfaite et ne possède donc qu'une composante inductive pure. Dans ce cas, autrement dit en l'absence de composante résistive, il n'y a pas de puissance active consommée. Seule la puissance réactive est échangée avec le générateur avec une moyenne nulle. Cependant, en présence d'une bobine réelle (composante résistive), il y a bien une puissance active consommée par la bobine qui, elle, n'est pas nulle.

16. **Faux.** Le facteur de puissance d'un dipôle dépend de son impédance qui, en règle générale, dépend de la pulsation de l'alimentation.

Exercices

1. Puissances consommées par trois résistances en régime continu *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.6, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance délivrée par la source de tension. Vérifier le principe de la conservation de puissance à partir de ces résultats.

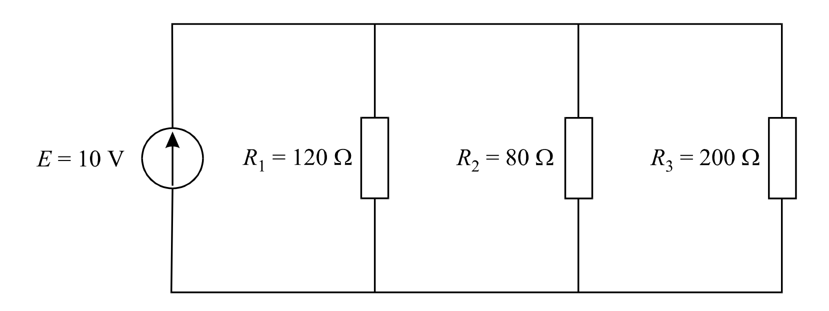


Figure 5.6

Conseil méthodologique

On remarquera que chaque résistance présente à ses bornes la même tension E. Il est alors facile d'exprimer la puissance consommée par chacune d'entre elles.

2. Puissances consommées dans un réseau de résistances en régime continu *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.7, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance fournie par le générateur de tension. Vérifier le principe de la conservation de l'énergie.

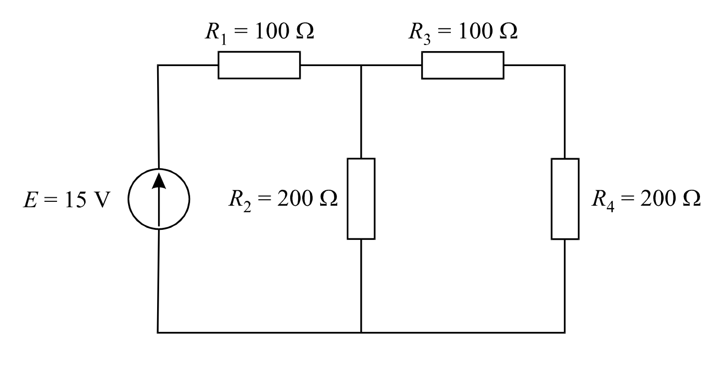


Figure 5.7

Conseil méthodologique

Pour connaître la puissance dissipée par une résistance, il est nécessaire d'évaluer la tension à ses bornes ou le courant qui la traverse. Dans cet exercice, l'accès aux différentes tensions ne pose aucune difficulté à partir du moment où l'on connaît le potentiel du point commun à R_1, R_2 et R_3.

3. Puissance délivrée par un générateur de courant continu *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.8, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance fournie par le générateur de courant.

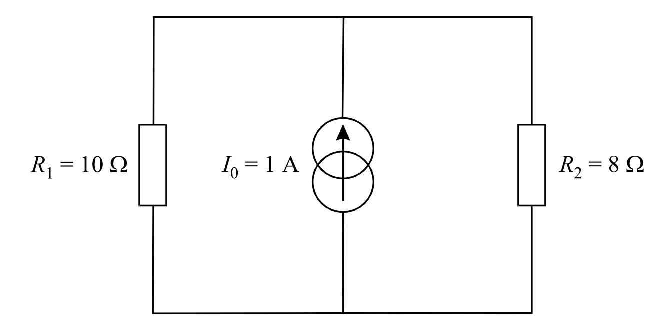


Figure 5.8

Conseil méthodologique

Il est conseillé, ici, de rechercher, en tout premier lieu, la valeur de la tension aux bornes des deux résistances.

4. Puissances consommées dans un circuit alimenté par deux générateurs continus *

Dans le circuit représenté sur la figure 5.9, déterminer les puissances moyennes consommées par chaque résistance, ainsi que la puissance délivrée par chacun des deux générateurs. Vérifier le principe de la conservation de puissance dans ce circuit.

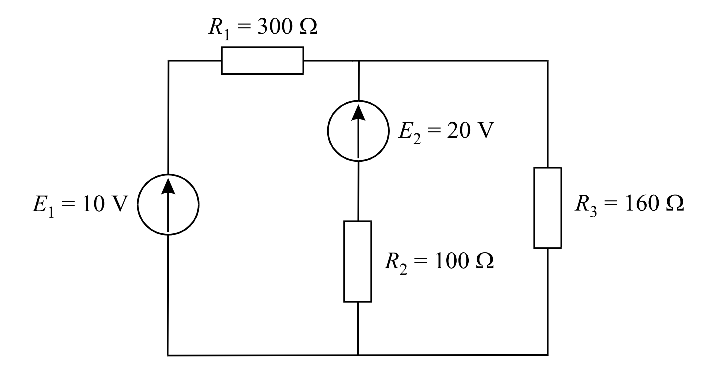


Figure 5.9

Conseil méthodologique

On accédera aux valeurs des différentes puissances en cherchant, par exemple, les intensités des courants circulant dans les résistances. Comme il y a deux générateurs, on utilisera le principe de superposition pour déterminer ces courants. Attention : le principe de superposition s'applique aux courants et aux tensions mais pas aux puissances qui ne sont pas des formes linéaires.

5. Étude de la puissance consommée par une charge variable alimentée par un générateur de tension continue réel **

Le montage de la figure 5.10 représente un générateur réel de tension continue (force électromotrice E et résistance interne r) qui alimente une résistance variable R.
Calculer la puissance P dissipée dans la résistance R.
Pour quelle valeur de R cette puissance est-elle maximale ?

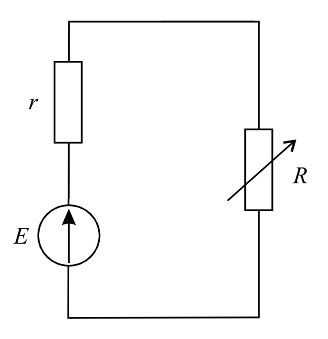


Figure 5.10

Conseil méthodologique

On calculera l'expression de la puissance dissipée en fonction des données de l'énoncé et notamment en fonction de R. On dérivera ensuite cette expression pour obtenir la condition recherchée.

6. Énergie consommée par un circuit RC en régime transitoire **

Dans le montage de la figure 5.11, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Calculer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, ainsi que le courant $i(t)$ qui circule dans le circuit.

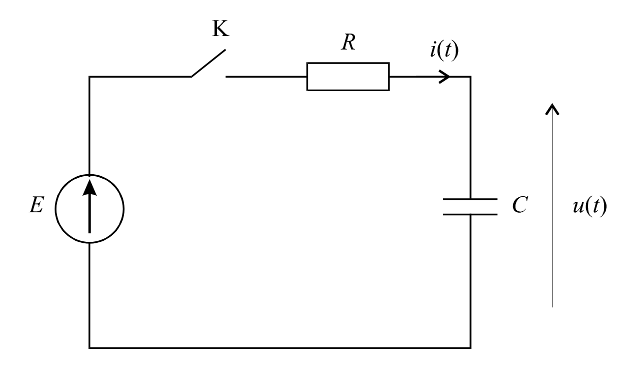


Figure 5.11

Calculer la puissance instantanée $p_C(t)$ consommée dans le condensateur. En déduire l'énergie totale W_C qu'il aura emmagasinée pendant toute la durée du régime transitoire (de $t = 0$ à $+\infty$).
De même, calculer la puissance instantanée $p_R(t)$ consommée par la résistance et en déduire l'énergie totale W_R dissipée par la résistance sur ce même intervalle de temps, c'est-à-dire pendant toute la durée de la charge du condensateur.
Calculer l'énergie totale W_0 fournie par le générateur et vérifier le principe de la conservation de l'énergie.

Conseil méthodologique

Il faut disposer des expressions temporelles de la tension aux bornes du condensateur et du courant qui le traverse pour évaluer la puissance instantanée qu'il consomme. On démarre donc l'exercice comme un problème classique de calcul d'un régime transitoire.

7. Énergie emmagasinée dans un condensateur **

En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que tout condensateur chargé, de capacité C et présentant une différence de potentiel V à ses bornes, possède une énergie emmagasinée $W = \frac{1}{2}CV^2$.

Conseil méthodologique

Il faut disposer des résultats de l'exercice 5.6 pour démarrer cet exercice en remarquant que l'expression trouvée précédemment ne dépend pas de la résistance contenue dans le circuit de charge.

8. Énergie emmagasinée dans une association série de deux condensateurs **

Dans le circuit de la figure 5.12, déterminer les expressions de l'énergie emmagasinée dans chacun des deux condensateurs.

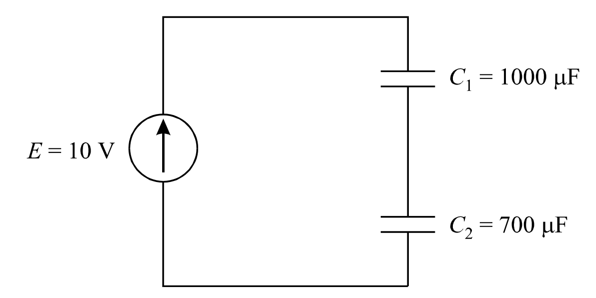


Figure 5.12

On montrera, au préalable, que les deux condensateurs possèdent la même charge Q. On supposera par ailleurs que les condensateurs étaient initialement déchargés lorsque l'on a appliqué la tension E aux bornes de l'ensemble.

Calculer l'énergie qui serait emmagasinée dans le condensateur équivalent à cette association série de C_1 et C_2.

Conseil méthodologique

Il n'y a aucun régime transitoire dans la mise en fonctionnement du circuit. Après avoir montré qu'aucun courant ne circule dans le montage, on raisonnera sur les charges contenues sur les armatures des condensateurs.

9. Énergie emmagasinée dans une association de trois condensateurs **

Dans le schéma de la figure 5.13, déterminer les expressions de l'énergie emmagasinée dans chacun des trois condensateurs.

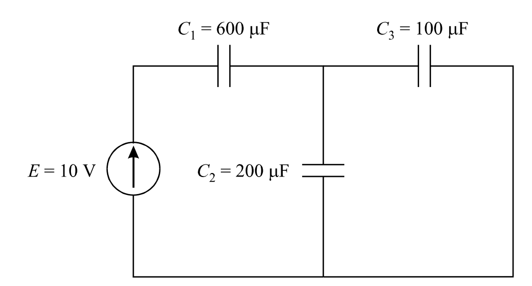


Figure 5.13

Conseil méthodologique

Il est nécessaire de connaître les tensions aux bornes de chaque condensateur pour déterminer les énergies qu'ils ont emmagasinées. Il peut être utile, dans un premier temps, de rechercher la capacité équivalente des condensateurs C_2 et C_3 pour simplifier le problème.

10. Puissance dissipée dans un circuit RC en régime sinusoïdal **

Dans le schéma de la figure 5.14, déterminer la puissance moyenne $< P >$ dissipée dans la résistance R.

Calculer la puissance complexe et montrer que la puissance active dissipée dans le dipôle AB correspond bien à la puissance moyenne $< P >$.

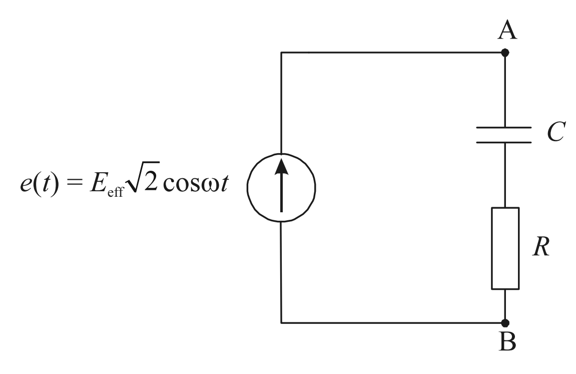


Figure 5.14

Conseil méthodologique

Après avoir calculé l'expression temporelle du courant, on calculera successivement, à partir de leurs définitions, la puissance moyenne consommée par la résistance et la puissance active consommée par le dipôle pour finalement montrer qu'elles sont égales.

11. Énergie emmagasinée dans un condensateur en régime transitoire ***

Dans le circuit représenté sur la figure 5.15, alimenté par un générateur parfait de tension continue, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Calculer l'énergie totale emmagasinée par le condensateur au bout d'un temps suffisamment long pour pouvoir supposer que le régime transitoire est terminé.

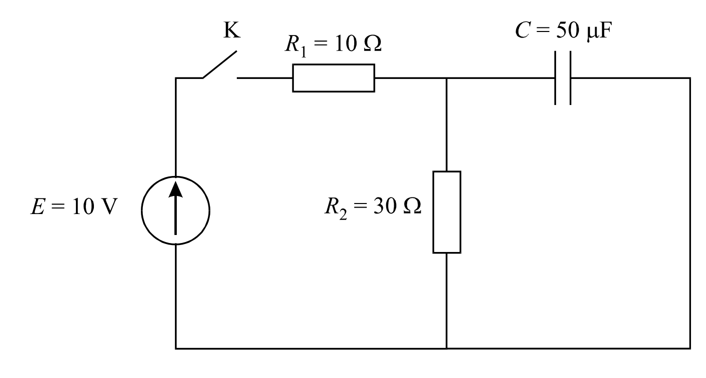


Figure 5.15

Conseil méthodologique

Il faut disposer des expressions de la tension aux bornes du condensateur et du courant qui le traverse pour calculer, par intégration, l'énergie emmagasinée. On démarre donc l'exercice comme

un problème traditionnel d'évaluation de régime transitoire. L'application de la loi des nœuds est un moyen simple de trouver rapidement l'équation différentielle qui régit le fonctionnement du circuit.

12. Énergie absorbée par une bobine en régime transitoire **

Dans le circuit représenté sur la figure 5.16, alimenté par un générateur parfait de tension continue, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Déterminer l'expression de la puissance instantanée $p_R(t)$ consommée dans la résistance R ainsi que la puissance instantanée $p_\mathrm{E}(t)$ délivrée par le générateur. En déduire la puissance instantanée $p_\mathrm{L}(t)$ absorbée par la bobine.

Déterminer l'énergie totale W_L absorbée par la bobine au cours du régime transitoire que l'on supposera d'une durée infinie.

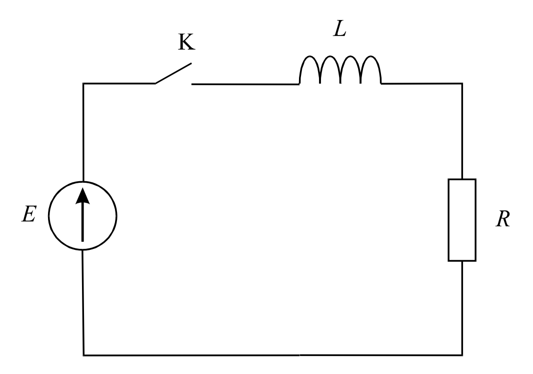


Figure 5.16

Conseil méthodologique

Il faut disposer de l'expression temporelle du courant pour déterminer les différentes puissances instantanées mises en jeu. Ce courant se calcule simplement à partir de l'équation différentielle de fonctionnement du circuit.

13. Énergie dissipée par une résistance pendant la charge de deux condensateurs ***

Dans le circuit représenté sur la figure 5.17, alimenté par un générateur parfait de tension continue, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Calculer l'énergie totale dissipée dans la résistance R durant la charge complète des deux condensateurs supposés initialement déchargés.

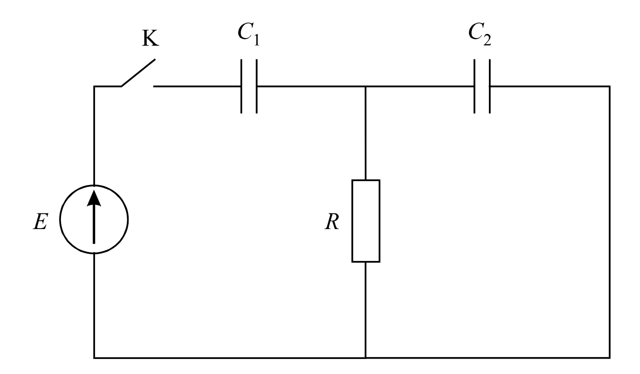


Figure 5.17

On donne : $C_1 = 1\,000\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 2\,200\,\mu\mathrm{F}$, $E = 50\,\mathrm{V}$.

Conseil méthodologique

La connaissance de la tension aux bornes de la résistance est nécessaire pour déterminer le résultat attendu. On cherchera donc, à partir de la loi des nœuds, à mettre en évidence l'équation différentielle de fonctionnement de ce circuit dont la solution est cette tension.

14. Puissance active dissipée dans deux montages équivalents **

Le montage de la figure 5.18 représente l'association en série d'une résistance R_1 et d'une bobine d'auto-inductance L_1. Ce dipôle, alimenté par une tension sinusoïdale telle que $\overline{E} = E_{\text{eff}}$ est parcouru par un courant dont la forme complexe est notée $\overline{I}$.

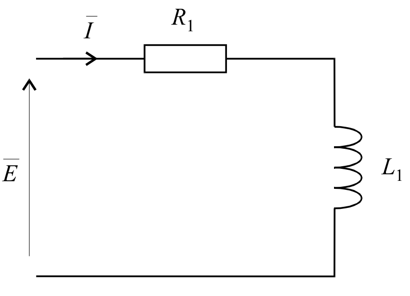


Figure 5.18

a. Montrer que le montage de la figure 5.19 constitué de l'association en parallèle d'une résistance R_2 et d'une bobine d'auto-inductance L_2 est équivalent à celui de la figure 5.18. Calculer les valeurs de R_2 et de L_2 qui assurent cette équivalence.

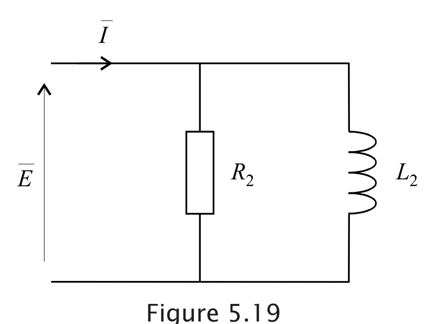


Figure 5.19

b. Calculer à partir de sa définition la puissance active dissipée dans les deux montages équivalents des figures 5.18 et 5.19. Conclure.

Conseil méthodologique

Il peut être utile de rappeler que deux dipôles sont équivalents si et seulement si, alimentés par la même source de tension, ils sont parcourus par le même courant. Ils doivent donc posséder la même impédance complexe.

15. Ajustement du facteur de puissance d'un dipôle ***

Dans le schéma de la figure 5.20, un dipôle AB est alimenté par un générateur parfait de tension sinusoïdale.

a. Calculer la puissance active et la puissance réactive consommées dans le dipôle.

b. Dans un second temps, on place un condensateur en parallèle avec le dipôle AB, comme cela est indiqué sur la figure 5.21. Calculer la valeur de C qui permet d'annuler la puissance réactive consommée par ce nouveau dipôle AB.

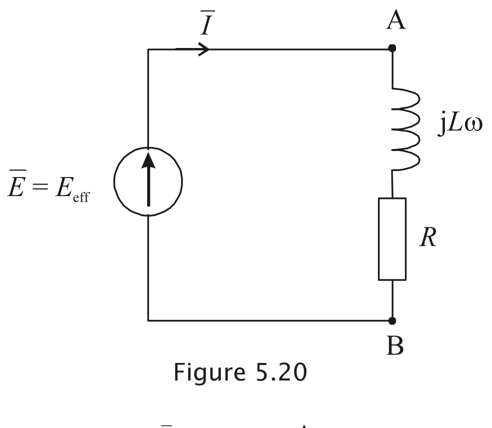


Figure 5.20

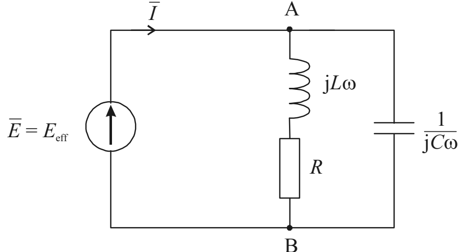


Figure 5.21

Conseil méthodologique

La première question ne pose pas de difficulté particulière. On pourra s'aider d'un diagramme de Fresnel pour déterminer les expressions de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$. En considérant ensuite la nouvelle expression de l'impédance complexe du dipôle AB, on cherchera la condition qui permet d'annuler $\sin\varphi$.

16. Optimisation de la puissance active dissipée dans un dipôle **

La figure 5.22 représente un dipôle d'impédance complexe $\overline{Z}$ alimenté par une source sinusoïdale de valeur efficace E_{eff} et de pulsation ω. Le circuit est parcouru par un courant $\overline{I}$ de valeur efficace I_{eff} et présentant un retard de phase φ par rapport à la tension d'alimentation.

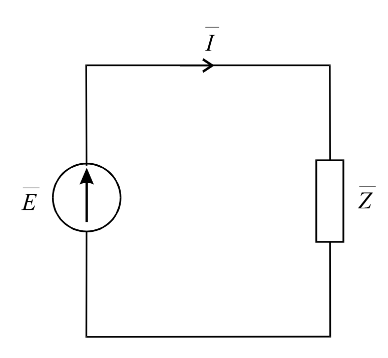


Figure 5.22

a. Déterminer en fonction de φ, E_{eff}, I_{eff} et ω, la valeur C du condensateur qu'il faut placer en parallèle sur le dipôle de manière à ce que la valeur efficace I_{eff} du courant débité par le générateur soit minimale.

b. Déterminer alors la puissance réactive $P_{r\,c}$ dans le condensateur ainsi que la puissance réactive $P_{r\,Z}$ consommée par le dipôle. Calculer $P_{r\,c} + P_{r\,Z}$. Conclure.

c. Quelle est l'énergie maximale emmagasinée dans le condensateur ?

A.N. : $E_{\text{eff}} = 100\,\text{V}$, $I_{\text{eff}} = 3\,\text{A}$, $\omega = 2\pi \times 50\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\cos\varphi = 0{,}76$

Conseil méthodologique

Attention, l'énoncé parle bien d'un retard de phase du courant par rapport à la tension. Il faut bien sûr déterminer l'expression de la valeur efficace du courant et dériver cette expression par rapport à C pour trouver la condition recherchée.

17. Étude d'un même circuit en régimes continu et sinusoïdal ***

On considère le montage de la figure 5.23. Un dipôle AB est alimenté par un générateur $e(t)$ au travers d'un circuit comportant trois résistances et un condensateur. Un interrupteur K permet de connecter ou non le condensateur au reste du circuit.

a. Dans un premier temps, on alimente le circuit avec une source de tension parfaite continue $e(t) = E_0$. Montrer que la position de l'interrupteur K n'a aucune importance. Calculer le courant circulant dans la résistance R_0 ainsi que la puissance qui y est dissipée.

b. L'interrupteur K étant ouvert, on alimente ensuite le circuit avec un générateur de tension parfait sinusoïdal $e(t) = E_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\omega t$. Calculer la puissance active dissipée dans le dipôle AB.

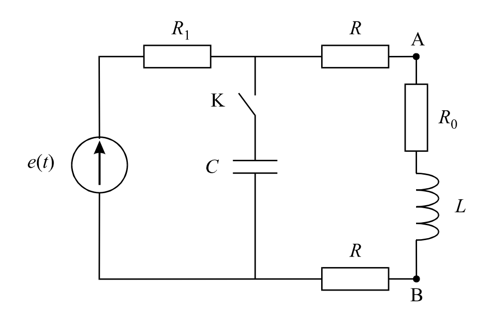


Figure 5.23

c. On ferme l'interrupteur et on continue d'alimenter le circuit avec la tension $e(t) = E_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\omega t$. On néglige tout phénomène transitoire. Calculer la nouvelle puissance active dissipée dans le dipôle AB.

Conseil méthodologique

L'étude en régime continu ne pose aucune difficulté : le circuit se simplifie en effet immédiatement. En régime sinusoïdal avec K ouvert, il s'agit de l'étude d'un circuit RC. C'est véritablement dans la troisième question que se trouvent les principales difficultés. On viendra à bout de ce problème en utilisant astucieusement le théorème de Thévenin.

18. Générateur sinusoïdal avec composante continue ***

La figure 5.24 représente un circuit composé d'un générateur de tension $e(t) = E_0 + E_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\omega t$ alimentant un dipôle AB quelconque.

a. Le dipôle étant formé d'une résistance R, calculer le courant qui y circule et déterminer la puissance instantanée fournie par le générateur, puis en intégrant sur une période, déterminer la puissance moyenne qu'il débite.

b. Le dipôle est formé de l'association en série d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. Déterminer l'expression du courant $i(t)$ qui circule dans le circuit et calculer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. Déterminer la puissance fournie par le générateur.

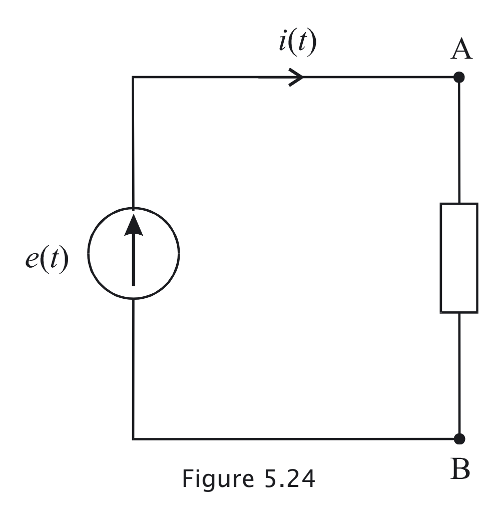


Figure 5.24

Conseil méthodologique

Lorsque le dipôle n'est constitué que d'une simple résistance, le calcul du courant dans le circuit est très facile. La puissance moyenne se calcule tout aussi facilement par un simple calcul intégral. Dans la seconde partie, on utilisera le principe de superposition pour accéder à l'expression du courant.

Réponses

1. Soit P_1, P_2 et P_3 les puissances dissipées respectivement dans chacune des trois résistances R_1, R_2 et R_3.

La même tension E étant appliquée aux bornes de chaque résistance, on a immédiatement :

$$P_1 = \frac{E^2}{R_1},\ P_2 = \frac{E^2}{R_2},\ P_3 = \frac{E^2}{R_3}$$

Par ailleurs, le générateur E débite dans une résistance équivalente R_{eq}telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

La puissance totale fournie par ce générateur vaut donc :

$$P_0 = \frac{E^2}{R_{eq}} = E^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

On a bien : $P_0 = P_1 + P_2 + P_3$.

Application numérique :

$$P_1 = \frac{(10)^2}{120} = 0{,}83\ \text{W}$$

$$P_2 = \frac{(10)^2}{80} = 1{,}25\ \text{W}$$

$$P_3 = \frac{(10)^2}{200} = 0{,}5\ \text{W}$$

Par ailleurs : $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{120} + \frac{1}{80} + \frac{1}{200}$$

Soit : $$R_{eq} = 38{,}71\ \Omega$$

On a donc : $$P_0 = \frac{(10)^2}{38{,}71} = 2{,}58\ \text{W}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le calcul de la puissance consommée par une résistance, en régime continu, se calcule facilement à partir du moment où la tension à ses bornes est identifiée.

2. La différence de potentiel aux bornes d'une résistance, ou bien le courant qui la traverse, suffisent l'un comme l'autre à déterminer la puissance dissipée dans cette résistance. Soit P_1, P_2, P_3 et P_4 les puissances dissipées dans chacune des quatre résistances. Soit P_0 la puissance fournie par le générateur.

Calculons la tension au point A (figure 5.25), qui nous permettra dans un premier temps de déterminer la différence de potentiel aux bornes de R_1 et de R_2. Appliquons pour cela le théorème de Millman au point A :

$$V_A = \frac{\dfrac{E}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3 + R_4}}$$

Soit : $$V_A = \frac{\dfrac{15}{100}}{\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{300}} = 8{,}2\ \text{V}$$

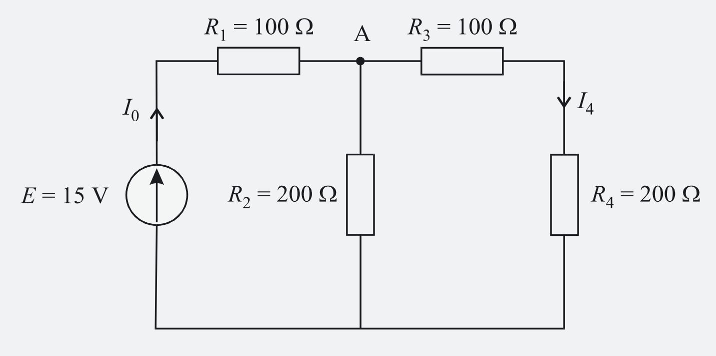


Figure 5.25

Cette tension V_A permet de calculer :

$$P_1 = \frac{(E - V_A)^2}{R_1} = 0{,}46\ \text{W}$$

$$P_2 = \frac{V_A^2}{R_2} = 0{,}34\ \text{W}$$

Soit I_4 le courant circulant dans les deux résistances R_3 et R_4. On a :

$$I_4 = \frac{V_A}{R_3 + R_4}$$

D'où :

$$P_3 = R_3 I_4^2 = R_3 \left(\frac{V_A}{R_3 + R_4} \right)^2 = 0{,}07\ \text{W}$$

$$P_4 = R_4 I_4^2 = R_4 \left(\frac{V_A}{R_3 + R_4} \right)^2 = 0{,}15\ \text{W}$$

Calculons enfin le courant I_0 afin de déterminer la puissance P_0 :

$$I_0 = \frac{E - V_A}{R_1}$$

D'où :

$$P_0 = EI_0 = E \times \frac{E - V_A}{R_1}$$

Application numérique :

$$P_0 = 15 \times \frac{15 - 8{,}2}{100} = 1{,}02\ \text{W}$$

On peut vérifier sans peine que :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0{,}46 + 0{,}34 + 0{,}07 + 0{,}15 = 1{,}02\ \text{W} = P_0$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans cet exercice, on a fait le choix de déterminer les puissances consommées à partir des courants dans les résistances. On optera pour l'une ou l'autre méthode (courants ou tensions) en fonction de la morphologie du circuit et de la facilité avec laquelle on peut déterminer telles ou telles grandeurs. On notera par ailleurs qu'en vérifiant le principe de conservation de l'énergie, on dispose d'un moyen de s'assurer que les calculs sont justes.

3. Soient P_1 et P_2 les puissances dissipées respectivement dans R_1 et R_2 et soit P_0 la puissance fournie par le générateur de courant. Tout se passe comme si le générateur de courant débitait dans une résistance équivalente à l'association parallèle de R_1 et R_2 (figure 5.26).

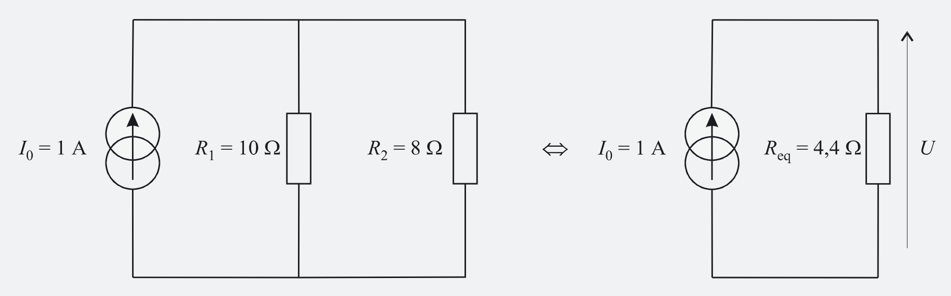


Figure 5.26

Cette résistance R_{eq}, égale à 4,4 Ω, présente à ses bornes une différence de potentiels $U = R_{eq}I_0 = 4{,}4$ V. Cette différence de potentiel U est présente aux bornes de chaque résistance, ainsi qu'aux bornes du générateur de courant. On a donc :

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = 1{,}98\ \text{W}$$
$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = 2{,}42\ \text{W}$$
$$P_0 = UI_0 = 4{,}4\ \text{W}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On peut être dérouté, de prime abord, par la présence d'un générateur de courant mais en réalité, le calcul de la puissance fournie par un générateur de courant ne pose pas plus de difficulté que dans le cas du générateur de tension. La puissance fournie est toujours égale au produit du courant par la tension apparaissant aux bornes du générateur.

4. Dans le circuit complet, appelons I_1, I_2 et I_3 les courants dans chacune des trois résistances. Appelons I_1', I_2' et I_3' les courants dus à la seule présence du générateur E_1 et I_1'', I_2'' et I_3'' les courants dus à la seule présence de E_2. Nous avons bien sûr :

$$I_1 = I_1' + I_1''$$
$$I_2 = I_2' + I_2''$$
$$I_3 = I_3' + I_3''$$

Dans un premier temps, calculons I_1', I_2' et I_3' en court-circuitant E_2 (figure 5.27).
Appliquons le théorème de Millman au point A. La connaissance du potentiel en ce point nous donnera effectivement accès aux courants recherchés.

$$V_A = \frac{\dfrac{E_1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{\dfrac{10}{300}}{\dfrac{1}{300} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{160}} = 1{,}7\ \text{V}$$

On en déduit immédiatement les valeurs des courants recherchés :

$$I_1' = \frac{E_1 - V_A}{R_1} = \frac{10 - 1{,}7}{300} = 28\ \text{mA}$$
$$I_2' = \frac{V_A}{R_2} = \frac{1{,}7}{100} = 17\ \text{mA}$$
$$I_3' = \frac{V_A}{R_3} = \frac{1{,}7}{160} = 11\ \text{mA}$$

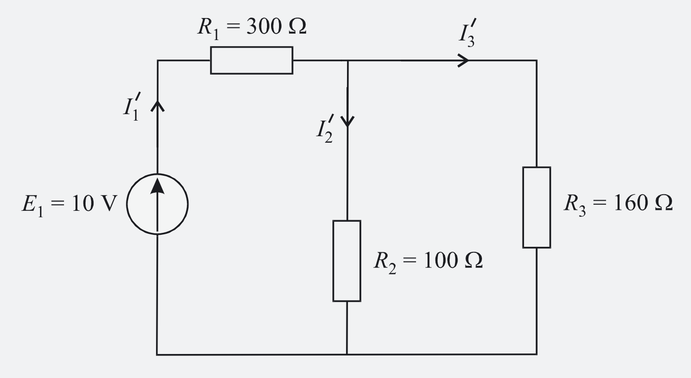


Figure 5.27

Dans un deuxième temps, calculons I''_1, I''_2 et I''_3 en court-circuitant E_1 (figure 5.28).
De manière à faciliter l'application du principe de superposition, nous placerons les trois courants dus à E_2 dans le même sens que les courants dus à E_1.

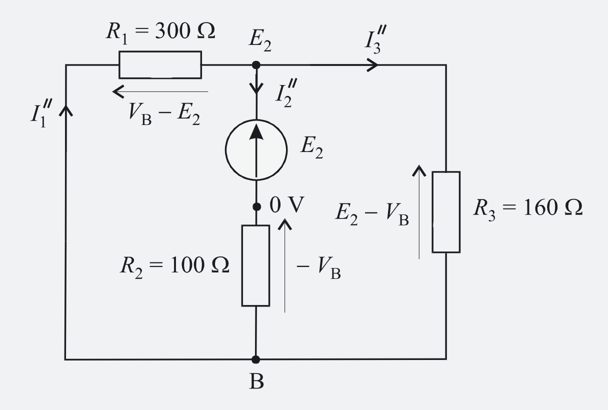


Figure 5.28

La borne négative du générateur servant de référence de potentiel, les tensions se placent comme indiquées sur la figure 5.28. Nous remarquons que la connaissance de V_B donne accès aux valeurs des trois courants.
Appliquons le théorème de Millman au point B :

$$V_B = \frac{\frac{E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{20 \times \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{160}\right)}{\frac{1}{300} + \frac{1}{100} + \frac{1}{160}} = 9{,}8\ \text{V}$$

D'où :

$$I''_1 = \frac{V_B - E_2}{R_1} = \frac{-10{,}2}{300} = -34\ \text{mA}$$

$$I''_2 = \frac{-V_B}{R_2} = \frac{-9{,}8}{100} = -98\ \text{mA}$$

$$I''_3 = \frac{E_2 - V_B}{R_3} = \frac{10{,}2}{160} = 64\ \text{mA}$$

Appliquons le principe de superposition :

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 28 \times 10^{-3} - 34 \times 10^{-3} = -6\ \text{mA}$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 17 \times 10^{-3} - 98 \times 10^{-3} = -81\ \text{mA}$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 11 \times 10^{-3} + 64 \times 10^{-3} = 75\ \text{mA}$$

On peut donc finalement calculer les puissances P_1, P_2 et P_3 dissipées respectivement dans R_1, R_2 et R_3 :

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 300 \times (-6 \times 10^{-3})^2 = 0{,}011\ \text{W}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = 100 \times (-81 \times 10^{-3})^2 = 0{,}66\ \text{W}$$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 160 \times (75 \times 10^{-3})^2 = 0{,}9\ \text{W}$$

Vérifions à présent le principe de la conservation de l'énergie : l'ensemble des puissances fournies par les éléments qui délivrent effectivement une puissance doit être égal à la somme des puissances consommées par les autres éléments.
Le générateur E_2 fournit une puissance égale à :

$$P_{E_2} = E_2(-I_2) = 20 \times 81 \times 10^{-3} = 1{,}62\ \text{W}$$

Le sens du courant réel circulant dans la branche deE_2 montre bien qu'il se comporte effectivement comme un générateur.
Le générateurE_1, quant à lui, fournit une puissance :

$$P_{E_1} = E_1 I_1 = 10 \times (-6 \times 10^{-3}) = -0{,}06\ \text{W}$$

Fournissant une puissance négative, le générateur E_1 ne se comporte pas comme un générateur, mais comme un récepteur. Il consomme donc une puissance égale à 0,06 W .
Le principe de la conservation de la puissance est bien vérifié puisque :

$$P_1 + P_2 + P_3 + (-P_{E_1}) = 0{,}011 + 0{,}66 + 0{,}9 + 0{,}06 = 1{,}63\ \text{W} = P_{E_2}$$

La différence de 0,01 W n'est due qu'aux erreurs d'arrondis successifs que nous avons commises au cours des calculs.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice contient un piège très dangereux : on est en effet très tenté d'utiliser le principe de superposition pour résoudre le problème. Or le principe de superposition est une conséquence directe de la linéarité du circuit et la puissance n'est pas une forme linéaire. On ne peut en aucun cas écrire que la puissance dans une résistance est la somme des deux puissances dues chacune à la présence d'un des deux générateurs. On utilise certes, le principe de superposition, mais pour déterminer le courant dans chaque résistance. Nous effectuons le calcul des puissances dissipées lorsque nous disposons des valeurs de ces courants.

5. Soit I le courant qui circule dans le circuit. On a évidemment :

$$I = \frac{E}{r + R}$$

La puissance dissipée dans la résistance r est donc :

$$P = RI^2 = \frac{RE^2}{(r + R)^2}$$

Pour calculer la valeur de R pour laquelle cette puissance P est maximale, dérivons l'expression de P par rapport à R :

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{d}{dR}\left[\frac{R}{(r + R)^2}\right] = E^2 \frac{(r + R)^2 - 2R(r + R)}{(r + R)^4}$$

Soit :

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{r^2 + 2rR + R^2 - 2Rr - 2R^2}{(r + R)^4}$$

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{r^2 - R^2}{(r + R)^4} = E^2 \frac{r - R}{(r + R)^3}$$

La puissance P sera maximale pour $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0$, soit $R = r$.
Il ne peut s'agir que d'un maximum, et non d'un minimum, puisque la dérivée de P est positive pour $R < r$ (fonction P croissante) et négative pour $R > r$ (fonction P décroissante).

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans un circuit résistif alimenté par une source réelle, la puissance fournie par la source est maximale lorsque la résistance du circuit est égale à la résistance interne de la source.

6. La loi des mailles appliquée dans l'unique maille du circuit nous donne :

$$E = Ri(t) + u(t)$$

Or :
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Le circuit est donc le siège d'un régime transitoire qui est régi par l'équation différentielle :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t)$$

Cette équation admet pour solution :

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

On obtient donc immédiatement :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = CE\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-e^{-\frac{t}{RC}}\right) = CE \times \frac{1}{RC} \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

Soit :
$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

La puissance instantanée consommée par le condensateur est égale, par définition à :

$$p_{\mathrm{C}}(t) = u(t)i(t)$$

Soit :
$$p_{\mathrm{C}}(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \times \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$$

L'énergie totale emmagasinée dans le condensateur durant sa charge (en théorie de $t = 0$ à $+\infty$) est donnée par la relation :

$$W_{\mathrm{C}} = \int_0^{+\infty} p_{\mathrm{C}}(t)\mathrm{d}t$$

D'où :
$$W_{\mathrm{C}} = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t\right)$$

Soit :
$$W_{\mathrm{C}} = \frac{E^2}{R}\left(\left[\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{-\frac{1}{RC}}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\frac{2t}{RC}}}{-\frac{2}{RC}}\right]_0^{+\infty}\right)$$

Finalement :
$$W_{\mathrm{C}} = \frac{E^2}{R}\left(RC - \frac{RC}{2}\right) = \frac{1}{2}CE^2$$

Calculons à présent la puissance instantanée consommée par R :

$$p_{\mathrm{R}}(t) = Ri^2(t) = R \times \frac{E^2}{R^2}e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{E^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$$

Comme précédemment, l'énergie totale dissipée dans la résistance s'obtient en intégrant cette puissance instantanée de $t = 0$ à $+\infty$:

$$W_{\mathrm{R}} = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[\frac{e^{-\frac{2t}{RC}}}{-\frac{2}{RC}}\right]_0^{+\infty} = \frac{E^2}{R} \times \frac{RC}{2}$$

Soit : $$W_R = \frac{1}{2}CE^2$$

Calculons pour finir l'énergie totale délivrée par le générateur :

$$W_0 = \int_0^{+\infty} p_0(t)\mathrm{d}t$$

$p_0(t)$ représentant la puissance instantanée fournie par le générateur.

Cette puissance instantanée est égale au produit de la tension délivrée par le générateur et du courant qui le traverse. On a donc : $$p_0(t) = Ei(t)$$

D'où : $$W_0 = \int_0^{+\infty} Ei(t)\mathrm{d}t = E\int_0^{+\infty} \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t$$

Soit : $$W_0 = \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{-\frac{1}{RC}}\right]_0^{+\infty} = \frac{E^2}{R}\times RC = CE^2$$

Le principe de la conservation de l'énergie est bien vérifié, puisque :

$$W_0 = CE^2 = W_R + W_C = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Même en régime transitoire, le principe de la conservation de l'énergie s'applique de manière inconditionnelle. On retiendra également de cet exercice que la méthode standard de calculs d'énergies emmagasinées, fournies ou dissipées en régime transitoire passe par le calcul des puissances instantanées mises en jeu.

7. L'exercice précédent décrit la charge d'un condensateur au travers d'une résistance R. Le résultat trouvé est indépendant de R et montre que tout condensateur de capacité C, chargé à l'aide d'un générateur de tension E, emmagasine au cours de sa charge, une énergie égale à $W = \frac{1}{2}CE^2$. Une fois chargé, le condensateur présente à ses bornes une différence de potentiel égale à E, ceci indépendamment de la manière dont la charge s'est effectuée. Ceci est la preuve que l'énergie emmagasinée ne dépend que de la tension aux bornes du condensateur et de la valeur de sa capacité, ce qui est d'ailleurs suggéré par l'expression trouvée dans l'exercice précédent.

En conclusion, tout condensateur chargé, de capacité C et présentant une différence de potentiel V à ses bornes, possède une énergie emmagasinée $W = \frac{1}{2}CV^2$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le résultat démontré dans cet exercice est très important : cette expression traduit la relation existant entre l'énergie emmagasinée dans un condensateur et sa charge, puisque celle-ci dépend de V :

$$Q = CV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{C} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

8. L'énoncé ne faisant pas état d'un quelconque régime transitoire, on suppose bien entendu que le circuit de la figure 5.12 fonctionne en régime continu. Aucun courant ne peut donc circuler dans le circuit. Les deux condensateurs sont chargés et présentent à leurs bornes des tensions respectives U_1 et U_2 (figure 5.29). Comme le circuit n'est plus le siège d'aucun mouvement de charge et que les condensateurs sont supposés initialement déchargés, la charge totale contenue sur l'armature négative de C_1 et sur l'armature positive de C_2 reste nulle.

On a donc : $$-Q_1 + Q_2 = 0$$

D'où : $$C_1U_1 = C_2U_2$$

Il nous faut chercher ces deux tensions U_1 et U_2 afin de déterminer l'énergie emmagasinée dans chaque condensateur.

Il nous suffit d'une seule autre équation contenant U_1 et U_2 :

$$U_1 + U_2 = E$$

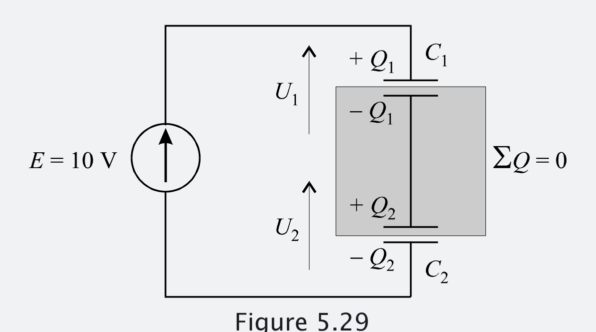


Figure 5.29

D'où par exemple :

$$U_1 + \frac{C_1}{C_2}U_1 = E \Rightarrow U_1 = \frac{E}{1 + \dfrac{C_1}{C_2}}$$

Soit :

$$U_1 = \frac{C_2 E}{C_1 + C_2}$$

Puis :

$$U_2 = \frac{C_1}{C_2}U_1 = \frac{C_1 E}{C_1 + C_2}$$

On en déduit les expressions des énergies emmagasinées dans C_1 et C_2, soit W_1 et W_2 :

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1 U_1^2 = \frac{1}{2}C_1 \times \left(\frac{C_2 E}{C_1 + C_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{C_1 C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}\right]E^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2}C_2 U_2^2 = \frac{1}{2}C_2 \times \left(\frac{C_1 E}{C_1 + C_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{C_2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}\right]E^2$$

Application numérique :

$$W_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{10^{-3} \times 700^2 \times 10^{-12}}{1\,700^2 \times 10^{-12}}\right] \times 10^2 = 8{,}5 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{700 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{1\,700^2 \times 10^{-12}}\right] \times 10^2 = 12{,}1 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

Calculons à présent l'énergie qui serait emmagasinée dans un condensateur C équivalent à l'association série de C_1 et de C_2.

On a :

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10^{-3} \times 700 \times 10^{-6}}{1\,700 \times 10^{-6}} = 412\,\mu\text{F}$$

L'énergie W emmagasinée dans un tel condensateur aux bornes duquel une tension E est appliquée vaut :

$$W = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2} \times 412 \times 10^{-6} \times 10^2 = 20{,}6 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

On a bien :

$$W = W_1 + W_2$$

Vérifions littéralement cette égalité :

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{C_1 C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}\right]E^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{C_2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}\right]E^2$$

Soit, après avoir mis E^2 en facteur :

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1 C_2^2 + C_2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}\right) \times E^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)^2}\right) \times E^2$$

Après simplifications, on obtient :

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \times E^2 = \frac{1}{2} C E^2 = W$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans le calcul d'énergies impliquées dans des associations de condensateurs, il est toujours préférable de raisonner sur les charges. Même dans cet exemple assez simple, c'est le moyen le plus rapide de mettre en équation les quantités d'énergie emmagasinées.

9. Le calcul de l'énergie emmagasinée dans chaque condensateur est subordonné à la connaissance des différences de potentiel aux bornes de chacun d'entre eux. Ainsi, on remarque sur la figure 5.30, que la même tension U_2 règne aux bornes de C_2 et C_3.

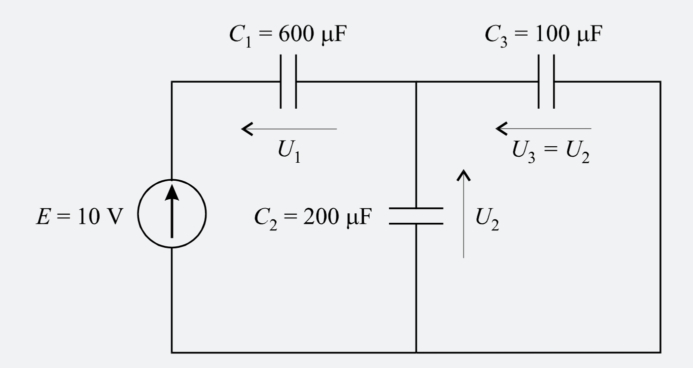


Figure 5.30

Soit C_{23} la capacité équivalente à l'association parallèle de ces deux condensateurs (figure 5.31). Dans cette figure, les deux condensateurs C_{23} et C_1 possèdent la même charge (voir exercice précédent : figure 5.29). On a donc : $C_1 U_1 = C_{23} U_2$

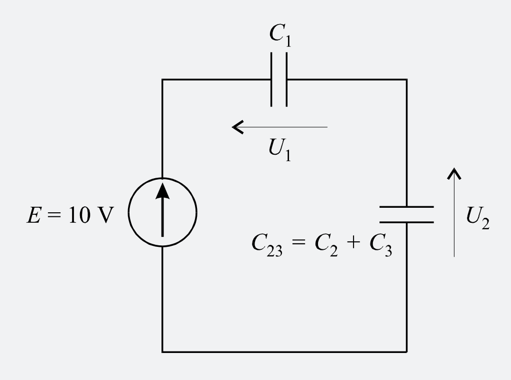


Figure 5.31

De plus : $E = U_1 + U_2$

D'où : $E = U_1 + \frac{C_1}{C_{23}} U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{C_{23}}{C_1 + C_{23}} E$

De même : $U_2 = \frac{C_1}{C_{23}} U_1 \Rightarrow U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_{23}} E$

On en déduit alors les expressions de l'énergie emmagasinée dans chacun des trois condensateurs :

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{2}C_1\left(\frac{C_{23}}{C_1 + C_{23}}\right)^2 \times E^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2}C_2U_2^2 = \frac{1}{2}C_2\left(\frac{C_1}{C_1 + C_{23}}\right)^2 \times E^2$$

$$W_3 = \frac{1}{2}C_3U_2^2 = \frac{1}{2}C_3\left(\frac{C_1}{C_1 + C_{23}}\right)^2 \times E^2$$

Application numérique :

$$C_{23} = 300\,\mu\text{F}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \times 600 \times 10^{-6} \times \left(\frac{300 \times 10^{-6}}{900 \times 10^{-6}}\right)^2 \times 30^2 = 3 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-6} \times \left(\frac{600 \times 10^{-6}}{900 \times 10^{-6}}\right)^2 \times 30^2 = 4 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \times \left(\frac{600 \times 10^{-6}}{900 \times 10^{-6}}\right)^2 \times 30^2 = 2 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La même conclusion que pour l'exercice précédent s'impose : dans le calcul d'énergies impliquées dans des associations de condensateurs, il est toujours préférable de raisonner sur les charges. La présence de trois condensateurs nous pousse ici à rechercher des équivalences et à procéder par simplification du circuit.

10. Le calcul de la puissance dissipée dans la résistance R nécessite la connaissance du courant $i(t)$ circulant dans le circuit.

Représentons le modèle complexe de notre circuit (figure 5.32).

Soit $\overline{I}$ la représentation complexe du courant $i(t)$ circulant dans le circuit. Comme nous sommes en régime sinusoïdal, on a :

$$i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \overline{I} = I_{\text{eff}}e^{j\varphi}$$

Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe équivalente du dipôle AB :

$$\overline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j\frac{1}{C\omega}$$

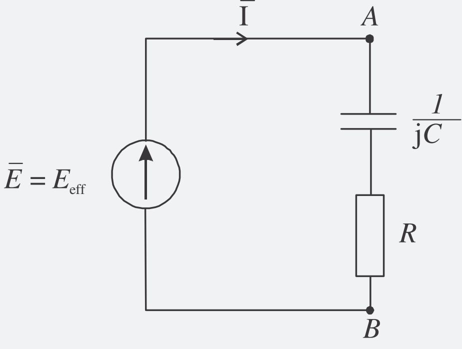


Figure 5.32

La loi d'Ohm généralisée au modèle complexe nous donne :

$$\overline{E} = \overline{Z} \cdot \overline{I} \Rightarrow E_{\text{eff}} = \left(R - j\frac{1}{C\omega}\right) \times I_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

En simplifiant les deux membres de cette équation par $e^{j\omega t}$:

$$E_0 = \left(R - j\frac{1}{C\omega}\right) \times I_0 e^{j\varphi}$$

En identifiant module et argument :

$$E_{\text{eff}} = \left|R - j\frac{1}{C\omega}\right| \times I_{\text{eff}} \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}$$

$$0 = \arg\left(R - j\frac{1}{C\omega}\right) + \varphi \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{1}{RC\omega}$$

On peut donc écrire l'expression de $i(t)$:

$$i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{E_{\text{eff}}\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{1}{RC\omega}\right)$$

Calculons à présent la puissance instantanée $p(t)$ dissipée dans la résistance, avant d'en évaluer la valeur moyenne :

$$p(t) = Ri^2(t) = 2RI_{\text{eff}}^2\cos^2(\omega t + \varphi) = RI_{\text{eff}}^2[\cos 2(\omega t + \varphi) + 1]$$

La valeur moyenne d'un signal périodique se calcule sur un multiple de sa période. Soit T la période de la tension $e(t) = E_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\omega t$. On a : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

La puissance $p(t)$, d'après son expression, apparaît comme une fonction périodique de pulsation double de celle de $e(t)$, donc de période $\dfrac{T}{2}$.

D'où le calcul de la valeur moyenne de $p(t)$:

$$\langle P\rangle = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} p(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\cdot RI_{\text{eff}}^2\int_0^{\frac{T}{2}}[\cos 2(\omega t + \varphi) + 1]\,\mathrm{d}t$$

$$\langle P\rangle = \frac{2}{T}\cdot RI_{\text{eff}}^2\left(\left[\frac{\sin 2(\omega t + \varphi)}{2\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} + [t]_0^{\frac{T}{2}}\right)$$

$$\langle P\rangle = \frac{2}{T}\cdot RI_{\text{eff}}^2\left(\frac{\sin(\omega T + 2\varphi)}{2\omega} - \frac{\sin 2\varphi}{2\omega} + \frac{T}{2}\right)$$

Or : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega T = 2\pi$

D'où : $\langle P\rangle = \dfrac{2}{T}\cdot RI_{\text{eff}}^2\left(\dfrac{\sin 2\varphi}{2\omega} - \dfrac{\sin 2\varphi}{2\omega} + \dfrac{T}{2}\right) = RI_{\text{eff}}^2$

En remplaçant I_{eff} par son expression, on obtient :

$$\langle P\rangle = \frac{RE_{\text{eff}}^2}{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}$$

Le calcul de cette intégrale était en réalité inutile : en effet, on remarque que l'expression de $p(t)$ est formée d'une composante sinusoïdale, donc à valeur moyenne nulle, et d'une composante constante (continue) égale à sa propre valeur moyenne. Le résultat pouvait donc être trouvé immédiatement.

Calculons à présent la puissance complexe, puis la puissance active dissipée dans le dipôle AB. Par définition, on a :

$$\overline{P} = \overline{E} \cdot \overline{I}^{*} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{-j\varphi}$$

Soit : $$\overline{P} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi - jE_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi = P_{\text{a}} - jP_{\text{r}}$$

La puissance active est donc égale à :

$$P_{\text{a}} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \frac{E_{\text{eff}}^2}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}} \cos\varphi$$

Le diagramme de Fresnel (figure 5.33) peut nous aider à trouver facilement l'expression de $\cos\varphi$.

Attention : l'argument de l'impédance complexe est l'opposé de l'avance algébrique de phase φ du courant par rapport à la tension.

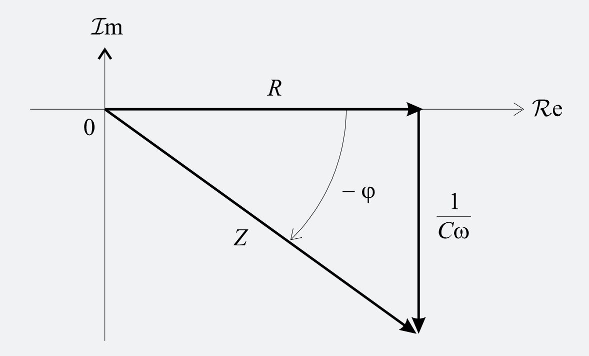


Figure 5.33

On lit : $$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}$$

D'où : $$P_{\text{a}} = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \frac{RE_{\text{eff}}^2}{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}} = \langle P \rangle$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Ce résultat apporte la preuve que la puissance moyenne dissipée dans un dipôle alimenté par un générateur sinusoïdal, est strictement égale à la puissance dissipée dans sa composante résistive.

11. Nommons les différents courants présents dans ce circuit et appelons $u(t)$ la tension aux bornes de C qui se trouve être également la tension aux bornes de R_2 (figure 5.34).

L'énergie totale W emmagasinée dans le condensateur au cours du régime transitoire correspond à l'intégrale de la puissance instantanée $p(t)$ absorbée par celui-ci, entre l'instant 0 correspondant à la fermeture de l'interrupteur et $+\infty$ puisqu'en théorie, le régime transitoire possède une durée infinie.

On a donc : $$W = \int_0^{+\infty} u(t)i(t)\mathrm{d}t$$

Il nous faut donc déterminer les deux grandeurs $u(t)$ et $i(t)$.

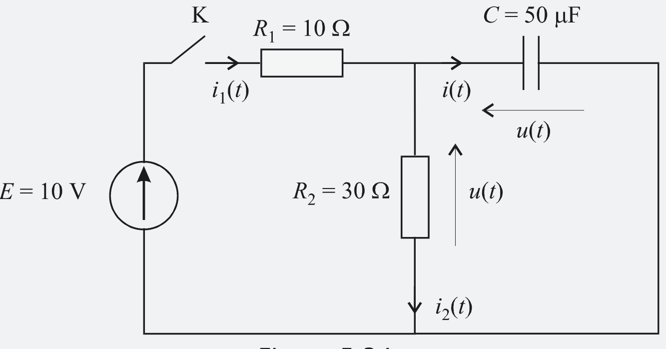


Figure 5.34

La loi des nœuds appliquée au circuit nous donne :

$$i_1(t) = i_2(t) + i(t)$$

Exprimons ces courants en fonction des tensions E et $u(t)$:

$$E - u(t) = R_1 i_1(t) \ \Rightarrow\ i_1(t) = \frac{E - u(t)}{R_1}$$

$$i_2(t) = \frac{u(t)}{R_2}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

L'équation de la loi des nœuds se transforme donc en l'équation différentielle qui régit ce régime transitoire :

$$\frac{E - u(t)}{R_1} = \frac{u(t)}{R_2} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Soit :

$$\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

On en déduit l'expression de $i(t)$:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{R_2 C E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit :

$$i(t) = \frac{E}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Calculons à présent l'énergie emmagasinée dans le condensateur :

$$W = \int_0^{+\infty} u(t)i(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \times \frac{E}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t$$

$$W = \frac{E^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \times \left[\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t\right]$$

$$W = \frac{E^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \times \left(\left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{-\frac{1}{\tau}}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}}{-\frac{2}{\tau}}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{E^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \times \left(\tau - \frac{\tau}{2}\right)$$

Soit en remplaçant τ par son expression :

$$W = \frac{E^2 R_2 \tau}{2R_1(R_1 + R_2)} = \frac{E^2 R_2}{2R_1(R_1 + R_2)} \times \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

D'où :

$$W = \frac{E^2 R_2^2 C}{2(R_1 + R_2)^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Destiné à s'entraîner au calcul d'énergie, cet exercice montre qu'il est nécessaire de bien maîtriser le calcul intégral pour obtenir les résultats recherchés. On notera que la présence de deux résistances dans le circuit de charge ne complique pas les calculs outre mesure.

12. Soit $i(t)$ le courant circulant dans le circuit. Plaçons les différentes tensions aux bornes des dipôles (figure 5.35).

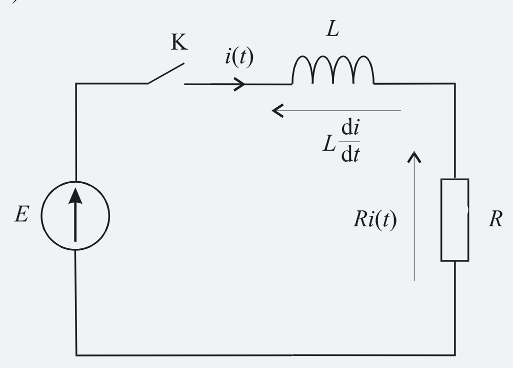


Figure 5.35

La loi des mailles nous donne immédiatement :

$$E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri(t)$$

Soit :

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i(t) = \frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

avec :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Calculons la puissance instantanée dissipée dans la résistance R :

$$p_{\mathrm{R}}(t) = Ri^2(t) = \frac{E^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

La puissance instantanée fournie par le générateur est :

$$p_{\mathrm{E}}(t) = Ei(t) = \frac{E^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Quant à la puissance instantanée absorbée par la bobine, elle s'obtient facilement en considérant le principe de conservation de la puissance :

$$p_{\mathrm{E}}(t) = p_{\mathrm{R}}(t) + p_{\mathrm{L}}(t) \Rightarrow p_{\mathrm{L}}(t) = p_{\mathrm{E}}(t) - p_{\mathrm{R}}(t)$$

D'où :

$$p_{\mathrm{L}}(t) = \frac{E^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - \frac{E^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

Soit :

$$p_{\mathrm{L}}(t) = \frac{E^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

$$p_{\mathrm{L}}(t) = \frac{E^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

L'énergie totale absorbée par la bobine au cours du régime transitoire se calcule en intégrant $p_L(t)$ de 0 à $+\infty$ puisque le régime transitoire, en théorie, du moins, possède une durée infinie.

$$W_L = \int_0^{+\infty} p_L(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)\mathrm{d}t$$

$$W_L = \frac{E^2}{R}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t\right) = \frac{E^2}{R}\left(\left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{-\frac{1}{\tau}}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}}{-\frac{2}{\tau}}\right]_0^{+\infty}\right)$$

D'où :
$$W_L = \frac{E^2}{R}\left(\tau - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{E^2}{R} \times \frac{\tau}{2} = \frac{LE^2}{2R^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On remarquera que l'expression de l'énergie emmagasinée dans une bobine dépend de la résistance utilisée dans le circuit de charge. Il peut également être intéressant de constater l'homogénéité de l'expression.

13. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit et plaçons les tensions aux bornes de chaque dipôle comme cela est indiqué sur la figure 5.36.

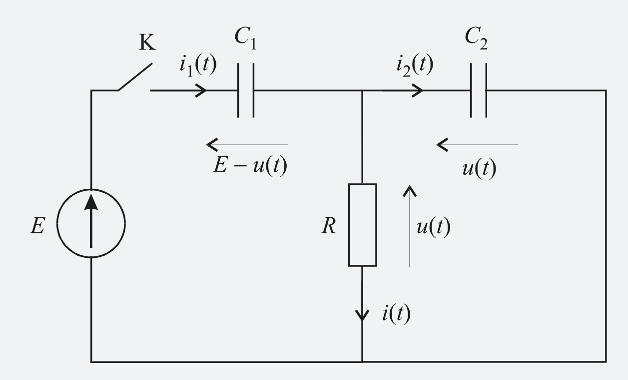


Figure 5.36

La tension $u(t)$ étant nécessaire pour déterminer la puissance instantanée dissipée dans R, donc l'énergie totale qu'elle consomme, nous recherchons l'équation différentielle dont la solution est cette différence de potentiel $u(t)$.
La loi des nœuds appliquée au circuit nous donne :

$$i_1(t) = i(t) + i_2(t)$$

Exprimons ces trois courants en fonction de $u(t)$. Les équations de fonctionnement des deux condensateurs permettent de déterminer deux de ces courants. En effet :

$$i_1(t) = C_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - u(t)) = -C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

et :
$$i_2(t) = C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Par ailleurs, la loi d'Ohm aux bornes de la résistance nous donne :

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

D'où :
$$-C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u(t)}{R} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Soit :
$$R(C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$$

Cette équation admet pour solution :

$$u(t) = E\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = R(C_1 + C_2)$$

La puissance instantanée dissipée dans la résistance est donc :

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{E^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

On en déduit l'énergie totale consommée par la résistance en intégrant $p(t)$ de 0 à $+\infty$ (le régime transitoire possédant en théorie une durée infinie). Par définition :

$$W = \int_0^{+\infty} p(t)\mathrm{d}t$$

Soit en remplaçant la puissance instantanée par son expression :

$$W = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t$$

$$W = \frac{E^2}{R}\left[\frac{e^{-\frac{2t}{\tau}}}{-\frac{2}{\tau}}\right]_0^{+\infty}$$

D'où : $$W = \frac{E^2}{R} \times \frac{\tau}{2}$$

Remplaçons τ par sa valeur :

$$W = \frac{E^2R(C_1 + C_2)}{2R} = \frac{E^2(C_1 + C_2)}{2}$$

Application numérique :

$$W = \frac{50^2 \times (3\,200 \times 10^{-6})}{2} = 4 \text{ J}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Une fois déterminée l'équation différentielle régissant le fonctionnement du circuit, il suffit de calculer l'intégrale de la puissance instantanée dissipée dans la résistance pour en déduire l'énergie totale qu'elle consomme.

14. **a.** Équivalence des deux montages

Les deux montages sont équivalents si et seulement si ils sont parcourus par le même courant lorsqu'on les alimente par la même tension. Autrement dit, ils doivent posséder la même impédance complexe. Donc : $$R_1 + jL_1\omega = \frac{jR_2L_2\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

D'où : $$(R_1 + jL_1\omega)(R_2 + jL_2\omega) = jR_2L_2\omega$$

Développons afin d'identifier parties réelles et parties imaginaires :

$$R_1R_2 + jR_2L_1\omega + jR_1L_2\omega - L_1L_2\omega^2 = jR_2L_2\omega$$

Soit : $$\begin{cases} R_1R_2 - L_1L_2\omega^2 = 0 \\ R_2L_1 + R_1L_2 = R_2L_2 \end{cases}$$

D'après la première équation de ce système, on tire :

$$R_2 = \frac{L_1L_2\omega^2}{R_1}$$

que l'on remplace dans la seconde :

$$\frac{L_1L_2\omega^2}{R_1}L_1 + R_1L_2 = \frac{L_1L_2\omega^2}{R_1}L_2$$

Soit : $$L_1^2\omega^2 + R_1^2 = L_1\omega^2L_2 \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{L_1^2\omega^2 + R_1^2}{L_1\omega^2}$$

qui nous donne l'expression de l'inductance propre du circuit de la figure 8.3.

Puis : $$R_2 = \frac{L_1L_2\omega^2}{R_1} = \frac{L_1\omega^2}{R_1} \times \frac{L_1^2\omega^2 + R_1^2}{L_1\omega^2}$$

Soit : $$R_2 = \frac{L_1^2\omega^2 + R_1^2}{R_1}$$

b. Calcul des puissances dissipées dans les résistances

Dans chacun des deux dipôles des figures 5.18 et 5.19, la puissance active a pour expression générale :

$$P_a = E_{eff}I_{eff}\cos\varphi$$

Avec : E_{eff} valeur efficace de la tension $e(t)$

I_{eff} valeur efficace du courant $i(t)$

φ avance algébrique de phase du courant $i(t)$ par rapport à la tension $e(t)$

Dans chacun des deux dipôles (figures 5.18 et 5.19), on a :

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{|\overline{Z}|}$$

$$\varphi = -\arg\left(\overline{Z}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \cos\left[\arg\left(\overline{Z}\right)\right]$$

où $\overline{Z}$ représente l'impédance complexe d'un dipôle.

Soient P_{a1} et P_{a2} les puissances actives respectivement dissipées dans les dipôles des figures 5.18 et 5.19. Pour le dipôle de la figure 5.18, on a :

$$\overline{Z} = R_1 + jL_1\omega$$

D'où : $$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{|\overline{Z}|} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}}$$

et : $$\cos\varphi = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}}$$

On en déduit donc :

$$P_{a1} = E_{eff}I_{eff}\cos\varphi = \frac{E_{eff}^2}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}} \times \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}} = \frac{E_{eff}^2R_1}{R_1^2 + L_1^2\omega^2}$$

Dans le schéma de la figure 5.19, on a :

$$\overline{Z} = \frac{jR_2L_2\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

D'où :
$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\left|\overline{Z}\right|} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}}$$

Par ailleurs :
$$\varphi = -\arg\left(\overline{Z}\right)$$

Soit :
$$\varphi = -\arg\left(jR_2L_2\omega\right) + \arg\left(R_2 + jL_2\omega\right) = -\frac{\pi}{2} + \arg\left(R_2 + jL_2\omega\right)$$

D'où :
$$\cos\varphi = \cos\left[-\frac{\pi}{2} + \arg\left(R_2 + jL_2\omega\right)\right]$$

$$\cos\varphi = \sin\left[\arg\left(R_2 + jL_2\omega\right)\right] = \frac{L_2\omega}{\sqrt{R_2^2 + L_2^2\omega^2}}$$

On en déduit donc :

$$P_{\text{a2}} = E_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\varphi = \frac{E_{\text{eff}}^2\sqrt{R_2^2 + L_2^2\omega^2}}{R_2L_2\omega} \times \frac{L_2\omega}{\sqrt{R_2^2 + L_2^2\omega^2}} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{R_2}$$

Notons que cette expression pouvait être trouvée immédiatement puisque la tension E_0 règne aux bornes de la résistance R_2.
En résolvant la première question, nous avons montré que :

$$R_2 = \frac{L_1^2\omega^2 + R_1^2}{R_1}$$

D'où :
$$P_{\text{a2}} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{\dfrac{R_1^2 + L_1^2\omega^2}{R_1}} = \frac{E_{\text{eff}}^2R_1}{R_1^2 + L_1^2\omega^2} = P_{\text{a1}}$$

On remarque que les deux expressions sont égales, ce qui n'a rien d'étonnant, compte tenu que les deux dipôles sont équivalents : la puissance active dissipée dans un dipôle est égale à la puissance active dissipée dans tout dipôle qui lui est équivalent.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Lorsque deux dipôles sont équivalents, ils consomment la même puissance active. On notera par ailleurs que deux dipôles sont équivalents en régime sinusoïdal s'ils possèdent la même impédance complexe.

15. **a.** Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe du dipôle AB de la figure 5.20. La puissance complexe qu'il consomme est égale à :

$$\overline{P} = \overline{E} \cdot \overline{I}^* = E_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\varphi - jE_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\sin\varphi = P_{\text{a}} - jP_{\text{r}}$$

avec :
$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\left|\overline{Z}\right|} = \frac{E_{\text{eff}}}{\left|R + jL\omega\right|} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

Par ailleurs, les expressions de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$ s'obtiennent aisément à partir de la représentation de Fresnel (figure 5.37).

Attention : l'argument de l'impédance complexe est l'opposé de l'avance algébrique de phase φ du courant par rapport à la tension.

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

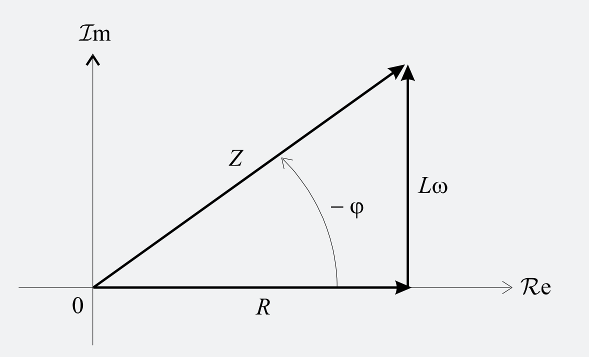


Figure 5.37

$$\sin\varphi = \frac{-L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

On en déduit immédiatement les expressions des puissances active et réactive :

$$P_a = E_{\text{eff}} \cdot \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{RE_{\text{eff}}^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$P_r = E_{\text{eff}} \cdot \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot \frac{-L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = -\frac{L\omega E_{\text{eff}}^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

b. Considérons à présent le montage de la figure 5.21. Soit $\overline{Z}$ l'impédance complexe de ce nouveau dipôle AB. On a :

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega$$

Soit :
$$\overline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Compte tenu des résultats trouvés précédemment, il est clair que l'annulation de la puissance réactive consommée par le dipôle est équivalente à :

$$\sin\varphi = 0$$

Or :
$$\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \tan\varphi = 0$$

Comme φ est l'opposé de l'argument de $\overline{Z}$, il vient :

$$\arg\overline{Z} = \arg(R + jL\omega) - \arg\left(1 - LC\omega^2 + jRC\omega\right) = 0$$

Soit :
$$\arctan\frac{L\omega}{R} = \arctan\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

On en déduit que la condition pour laquelle la puissance réactive consommée par le dipôle est nulle est :

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} \Rightarrow L\omega\left(1 - LC\omega^2\right) = R^2C\omega$$

D'où :
$$C\left(R^2\omega + L^2\omega^3\right) = L\omega \Rightarrow C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Les installations électriques domestiques sont en règle générale formées d'une composante résistive et d'une composante inductive. Même si la puissance réactive échangée avec les composantes inductives d'une installation ne correspond pas à une réelle dissipation d'énergie, elle doit malgré tout être acheminée vers le consommateur par le fournisseur d'énergie. Ce transport occasionne en revanche une dissipation sur les lignes de transport électriques, ce qui peut conduire le fournisseur à imposer la mise en parallèle d'un condensateur sur toute installation, de manière à garantir un $\cos\varphi$ voisin de 1. Cela ne change rien à la consommation du client puisque la puissance absorbée par cette capacité est en moyenne nulle.

16. **a. Calcul de la capacité *C***

En l'absence du condensateur, on a $\overline{E} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$.

Soit : $$E_{\text{eff}} = \overline{Z} I_{\text{eff}} e^{-j\varphi}$$

Attention : l'énoncé parle bien d'un retard de phase φ du courant par rapport à la tension d'alimentation. D'où le signe moins.

En écrivant $\overline{Z}$ sous la forme module et argument, on a :

$$E_{\text{eff}} = Z e^{j\psi} I_{\text{eff}} e^{-j\varphi}$$

En identifiant les arguments des deux membres de cette équation, il vient :

$$\psi = \varphi$$

Avec le condensateur de capacité C en parallèle sur le dipôle $\overline{Z}$, le schéma devient celui de la figure 5.38.

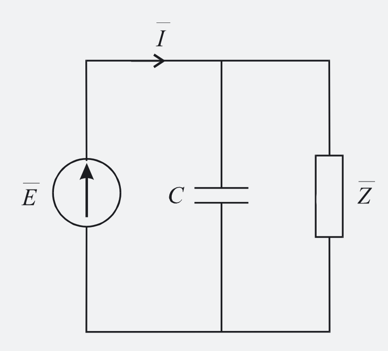


Figure 5.38

Cette fois-ci, on a : $$\overline{E} = \overline{Z_1} \overline{I}$$
où $\overline{Z_1}$ représente l'impédance équivalente de l'association en parallèle de C et de $\overline{Z}$.

Soit : $$\frac{1}{\overline{Z_1}} = jC\omega + \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1 + jC\overline{Z}\omega}{\overline{Z}}$$

Donc : $$\overline{Z_1} = \frac{\overline{Z}}{1 + jC\overline{Z}\omega}$$

On a donc : $$\overline{E} = \frac{\overline{Z}}{1 + jC\overline{Z}\omega} \overline{I}$$

En prenant les modules des deux membres de cette équation, on obtient :

$$E_{\text{eff}} = \left| \frac{\overline{Z}}{1 + jC\overline{Z}\omega} \right| I_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad I_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} \frac{\left|1 + jC\overline{Z}\omega\right|}{Z}$$

Cette valeur efficace I_{eff} sera minimale lorsque l'expression $\left|1 + jC\overline{Z}\omega\right|$ sera minimale. Or $\left|1 + jC\overline{Z}\omega\right| = \left|1 + jC\omega Z e^{j\varphi}\right| = |1 + jC\omega Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)|$.

D'où : $$\left|1 + jC\overline{Z}\omega\right| = |1 - C\omega Z \sin\varphi + jC\omega Z \cos\varphi|$$

$$\left|1 + jC\overline{Z}\omega\right| = \sqrt{(1 - C\omega Z \sin\varphi)^2 + (C\omega Z \cos\varphi)^2}$$

$$\left|1 + jC\overline{Z}\omega\right| = \sqrt{1 - 2C\omega Z \sin\varphi + C^2\omega^2 Z^2 \sin^2\varphi + C^2\omega^2 Z^2 \cos^2\varphi}$$

$$\left|1 + jC\overline{Z}\omega\right| = \sqrt{1 - 2C\omega Z \sin\varphi + C^2\omega^2 Z^2}$$

On doit donc calculer C de manière à ce que l'expression :

$$f(C) = 1 - 2C\omega Z \sin\varphi + C^2\omega^2 Z^2$$

soit minimale.

Cette expression est un polynôme de degré 2 en C qui possède bien un minimum puisque le coefficient en C^2 est positif. Dérivons par rapport à C pour déterminer la valeur de la capacité qui rend $f(C)$ minimale :

$$\frac{df}{dC} = -2\omega Z \sin\varphi + 2C\omega^2 Z^2$$

$$\frac{df}{dC} = 0 \;\Rightarrow\; 2\omega Z \sin\varphi = 2C\omega^2 Z^2$$

D'où : $$C = \frac{\sin\varphi}{\omega Z}$$

Comme : $$Z I_{\text{eff}} = E_{\text{eff}}$$

on obtient finalement : $$C = \frac{I_{\text{eff}} \sin\varphi}{\omega E_{\text{eff}}}$$

A.N. : $$C = \frac{3 \times 0{,}65}{2 \times \pi \times 50 \times 100} = 62\,\mu\text{F}$$

En effet : $$\cos\varphi = 0{,}76 \;\Rightarrow\; \varphi = 0{,}7\,\text{rad} \;\Rightarrow\; \sin\varphi = 0{,}65$$

b. Calcul des puissances réactives

Soit $\overline{I}_c$ le courant dans le condensateur. Comme la tension $\overline{E}$ règne aux bornes du condensateur, on a :

$$\overline{I}_c = jC\omega\overline{E}$$

Par définition, la puissance réactive échangée avec le condensateur correspond à l'opposé de la partie imaginaire de la puissance complexe $\overline{P}$.

Or : $$\overline{P} = \overline{E} \cdot \overline{I}_c^* = \overline{E}\left(-jC\omega\overline{E}^*\right)$$

Soit : $$\overline{P} = -jC\omega\overline{E}\overline{E}^* = -jC\omega E_{\text{eff}}^2$$

En notant $P_{\text{r}\,c}$ la puissance réactive dans le condensateur, on a donc :

$$P_{\text{r}\,c} = C\omega E_{\text{eff}}^2$$

Soit $\overline{I}_2$ le courant dans le dipôle. Comme la tension $\overline{E}$ règne aux bornes du dipôle, on a :

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}}$$

Par définition, la puissance réactive échangée avec le dipôle correspond à l'opposé de la partie imaginaire de la puissance complexe $\overline{P}$.

Soit : $$\overline{P} = \overline{E} \cdot \overline{I}_2^*$$

D'où : $$\overline{P} = \overline{E} \cdot \frac{\overline{E}^*}{\overline{Z}^*} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{Ze^{-j\varphi}} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{Z} e^{j\varphi}$$

L'opposé de la partie imaginaire de cette puissance complexe est la puissance réactive $P_{\text{r}\,Z}$ dissipée dans le dipôle :

$$P_{\text{r}\,Z} = -\frac{E_{\text{eff}}^2}{Z} \sin\varphi$$

Calculons à présent $P_{\text{r}\,c} + P_{\text{r}\,Z}$:

$$P_{\text{r}\,c} + P_{\text{r}\,Z} = C\omega E_{\text{eff}}^2 - \frac{E_{\text{eff}}^2}{Z} \sin\varphi$$

D'après le résultat de la première question :

$$C = \frac{I_{\text{eff}} \sin \varphi}{\omega E_{\text{eff}}}$$

On a donc : $$P_{\text{r}\,c} + P_{\text{r}\,Z} = \frac{I_{\text{eff}} \sin \varphi}{\omega E_{\text{eff}}} \omega E_{\text{eff}}^2 - \frac{E_{\text{eff}}^2}{Z} \sin \varphi$$

Soit : $$P_{\text{r}\,c} + P_{\text{r}\,Z} = \frac{I_0 E_0}{2} \sin \varphi - \frac{E_0^2}{2Z} \sin \varphi$$

Rappelons que I_{eff} est la valeur efficace du courant qui traverse le circuit dans le cas où seul le dipôle est présent.

On a donc : $$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{Z}$$

D'où : $$P_{\text{r}\,c} + P_{\text{r}\,Z} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{Z} \sin \varphi - \frac{E_{\text{eff}}^2}{Z} \sin \varphi$$

Soit : $$P_{\text{r}\,c} + P_{\text{r}\,Z} = 0$$

Ce résultat n'a rien de surprenant : la puissance réactive s'échange constamment entre le condensateur et la réactance du dipôle.

c. Calcul de l'énergie maximale dans le condensateur

Au cours du temps, l'énergie stockée dans le condensateur varie : elle oscille entre une valeur maximale et une valeur minimale.

Cette variation est simultanée à l'échange d'énergie avec la réactance du dipôle alimenté. Comme la tension aux bornes du condensateur oscille entre E_0 et $-E_0$, la valeur maximale de l'énergie emmagasinée est :

$$W_{\max} = \frac{1}{2} C E_0^2$$

A.N. : $$W_{\max} = \frac{1}{2} \times 62 \times 10^{-6} \times 10^4 = 0{,}31\ \text{J}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La puissance réactive consommée par le condensateur est l'opposée de celle consommée par le dipôle. Autrement dit, il y a en permanence échange d'énergie réactive entre ces deux éléments, ce qui signifie que ce n'est pas la source d'alimentation qui fournit cette énergie réactive. Il s'agit là d'une autre approche (plus physique) du cas traité dans le problème 5.2. Le condensateur, ajusté à sa valeur optimale, sert d'organe ń local ż d'échange d'énergie réactive.

17. **a.** Étude en régime continu

Si l'interrupteur K est fermé, un régime transitoire apparaît, qui a pour conséquence de charger le condensateur. Une fois le régime permanent établi, le condensateur est chargé et il se comporte comme un circuit ouvert. En conséquence, la position de l'interrupteur n'a aucune importance.

Par ailleurs, la bobine se comporte, en régime continu, comme un circuit fermé. Le circuit est alors équivalent au montage présenté sur la figure 5.39.

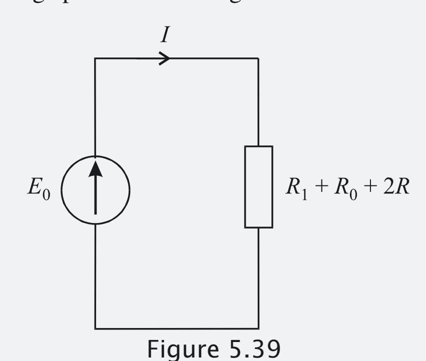


Figure 5.39

Le même courant continu I circule dans tout le circuit et on a :

$$I = \frac{E_0}{R_1 + R_0 + 2R}$$

La puissance dissipée dans le dipôle AB est égale à la puissance dissipée dans la résistance R_0. Comme celle-ci est parcourue par I, on a :

$$P = R_0 I^2 = \frac{R_0 E_0^2}{(R_1 + R_0 + 2R)^2}$$

b. Étude en régime sinusoïdal, K ouvert

Lorsque K est ouvert, le condensateur n'a aucune influence sur le fonctionnement du circuit. Celui-ci est équivalent au montage de la figure 5.40. Conformément au modèle complexe, le courant dans le circuit a pour expression :

$$\overline{I} = \frac{E_{\text{eff}}}{R_1 + R_0 + 2R + jL\omega}$$

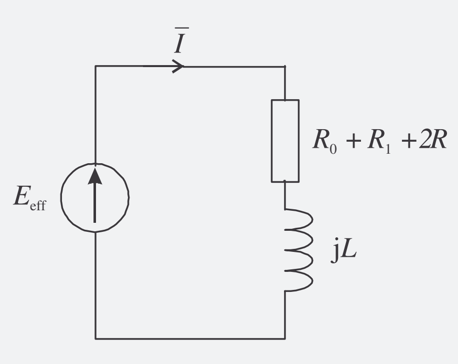


Figure 5.40

Soit I_{eff} la valeur efficace du courant $i(t)$. On a : $I_{\text{eff}} = \left|\overline{I}\right| = \dfrac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{(R_1 + R_0 + 2R)^2 + L^2\omega^2}}$

La puissance dissipée dans la résistance R_0 est alors égale à :

$$P = R_0 I_{\text{eff}}^2$$

I_{eff} étant la valeur efficace du courant $i(t)$.

Comme : $$\text{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

on a : $$P = R_0 I_{\text{eff}}^2 = \frac{R_0 E_{\text{eff}}^2}{(R_1 + R_0 + 2R)^2 + L^2\omega^2}$$

c. Étude en régime sinusoïdal, K fermé

La figure 5.41 représente le modèle complexe du circuit.

Pour déterminer la puissance active dissipée dans le dipôle AB, autrement dit, la puissance dissipée dans R_0, il nous faut connaître le courant circulant dans cette résistance. Considérons le dipôle XY (figure 5.42) et déterminons son générateur équivalent de Thévenin.

Transformons successivement ce dipôle XY. L'association en série du générateur et de la résistance R_1 est équivalente à un générateur de Norton (figure 5.43). Soit $\overline{Z}_{\text{eq}}$ l'impédance complexe équivalente à l'association en parallèle de R_1 et du condensateur.

On a : $$\frac{1}{\overline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + jC\omega \;\Rightarrow\; \overline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}$$

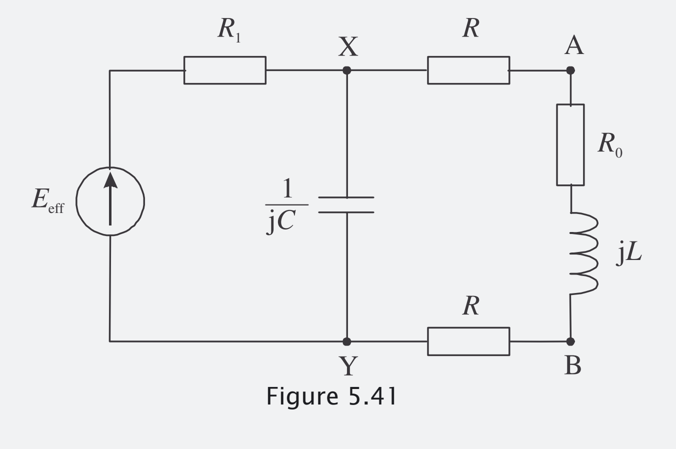


Figure 5.41

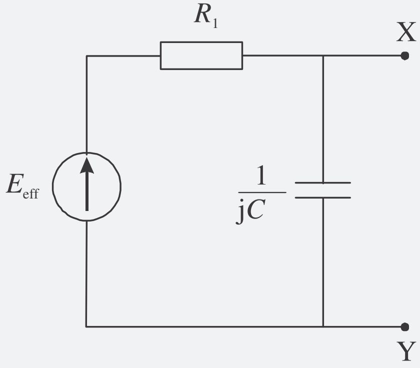


Figure 5.42

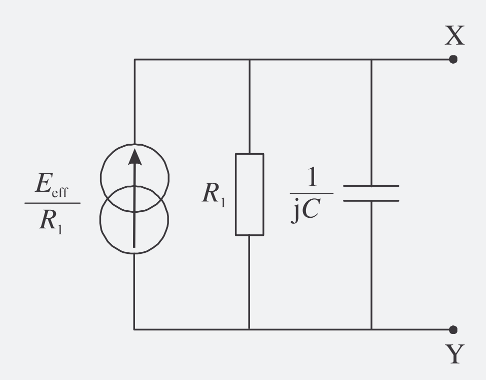


Figure 5.43

La figure 5.44 nous montre la dernière transformation Norton-Thévenin qui conduit au générateur de Thévenin équivalent au dipôle XY. $\overline{Z}_{eq}$ est l'impédance équivalente du générateur de Thévenin. Soit $\overline{E}_{eq}$ sa tension.

On a :
$$\overline{E}_{eq} = \frac{E_{eff}}{R_1}\overline{Z}_{eq} = \frac{E_{eff}}{R_1}\left(\frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}\right)$$

D'où :
$$\overline{E}_{eq} = \frac{E_{eff}}{1 + jR_1C\omega}$$

Le circuit global fonctionnant en régime sinusoïdal est donc équivalent au schéma proposé sur la figure 5.45. Calculons le courant $\overline{I}$ dans le circuit. Ce courant se détermine facilement puisque nous n'avons qu'une seule maille.

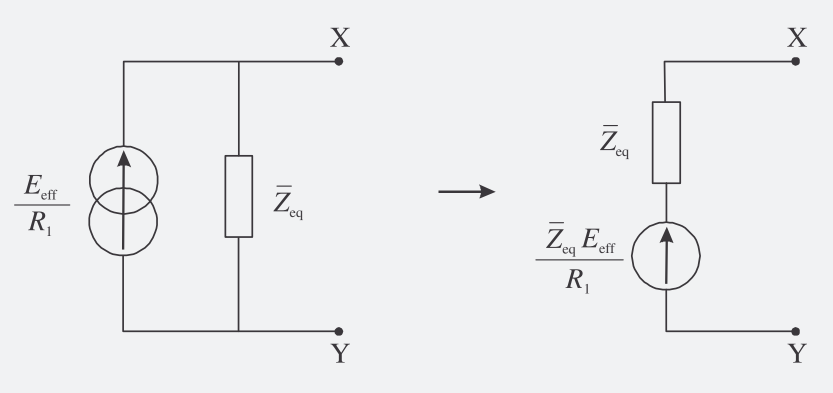


Figure 5.44

On a :

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}_{\text{eq}}}{\overline{Z}_{\text{eq}} + 2R + R_0 + jL\omega}$$

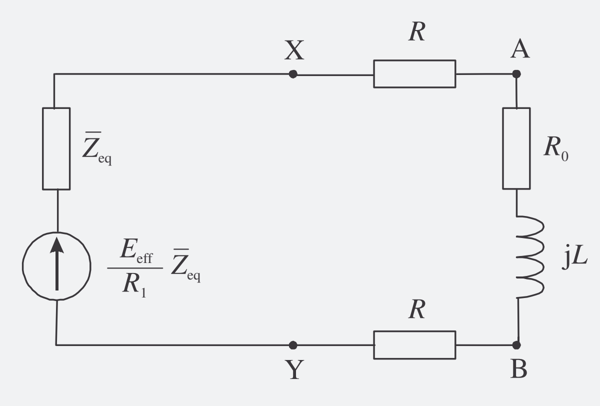


Figure 5.45

Soit, en remplaçant $\overline{E}_{\text{eq}}$ et $\overline{Z}_{\text{eq}}$ par leurs expressions :

$$\overline{I} = \frac{\dfrac{E_{\text{eff}}}{1 + jR_1C\omega}}{\dfrac{R_1}{1 + jR_1C\omega} + 2R + R_0 + jL\omega}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par $1 + jR_1C\omega$:

$$\overline{I} = \frac{E_{\text{eff}}}{R_1 + (2R + R_0 + jL\omega)(1 + jR_1C\omega)}$$

Soit, en développant le dénominateur :

$$\overline{I} = \frac{E_{\text{eff}}}{R_1 + 2R + R_0 + jL\omega + 2jRR_1C\omega + jR_0R_1C\omega - LR_1C\omega^2}$$

En regroupant les parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\overline{I} = \frac{E_{\text{eff}}}{(R_1 + 2R + R_0 - LR_1C\omega^2) + j\omega(L + 2RR_1C + R_0R_1C)}$$

La puissance active dissipée dans le dipôle AB correspond à la puissance dissipée dans R_0.

On a donc : $$P = R_0 I_{\text{eff}}^2$$

Avec :

$$I_{\text{eff}} = \left|\overline{I}\right| = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{\left(R_1 + 2R + R_0 - LR_1C\omega^2\right)^2 + \left(L + 2RR_1C + R_0R_1C\right)^2 \omega^2}}$$

D'où l'expression de la puissance dissipée dans R_0 :

$$P = \frac{R_0 E_{\text{eff}}^2}{\left(R_1 + 2R + R_0 - LR_1C\omega^2\right)^2 + \left(L + 2RR_1C + R_0R_1C\right)^2 \omega^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Destiné essentiellement à réviser les notions d'énergie et de puissance sous différents régimes, ce problème rassemble les différentes méthodes importantes qui sont utilisées en électricité pour déterminer les puissances mises en jeu dans un circuit.

18. **a. Calcul du courant dans la résistance**

Le dipôle étant constitué d'une unique résistance, on a bien sûr : $i(t) = \dfrac{e(t)}{R}$.

Soit : $$i(t) = \frac{E_0 + E_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\omega t}{R} = \frac{E_0}{R} + \frac{E_{\text{eff}}\sqrt{2}}{R}\cos\omega t$$

Le courant dans le circuit est constitué de la somme d'une composante continue et d'une composante sinusoïdale.

La puissance instantanée fournie par le générateur a pour expression :

$$p(t) = e(t)i(t) = \left(E_0 + E_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\omega t\right)\left(\frac{E_0}{R} + \frac{E_{\text{eff}}\sqrt{2}}{R}\cos\omega t\right)$$

Soit en développant :

$$p(t) = \frac{E_{\text{eff}}^2}{R} + 2\sqrt{2}\frac{E_{\text{eff}}E_0}{R}\cos\omega t + 2\frac{E_{\text{eff}}^2}{R}\cos^2\omega t$$

La puissance moyenne fournie par le générateur, calculée sur une période, est égale à :

$$P = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p(t)\mathrm{d}t$$

$$P = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{E_0^2}{R}\mathrm{d}t + \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 2\frac{E_1E_0}{R}\cos\omega t\mathrm{d}t + \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{E_1^2}{R}\cos^2\omega t\mathrm{d}t$$

Soit : $$P = \frac{E_0^2}{R} + 0 + \frac{\omega}{2\pi}\frac{E_1^2}{R}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{\cos 2\omega t + 1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$P = \frac{E_0^2}{R} + \frac{\omega}{2\pi}\frac{E_1^2}{2R}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos 2\omega t\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\mathrm{d}t\right]$$

$$P = \frac{E_0^2}{R} + \frac{\omega}{2\pi}\frac{E_1^2}{2R}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{E_0^2}{R} + \frac{E_1^2}{2R}$$

Finalement : $$P = \frac{2E_0^2 + E_1^2}{2R}$$

b. Calcul du courant dans le dipôle AB

Le dipôle AB étant formé de la mise en série d'une résistance et d'un condensateur, considérons que le générateur $e(t)$ peut se décomposer en deux générateurs placés en série (figure 5.46).

Nous appliquerons alors le principe de superposition pour déterminer le courant dans le circuit.

Il est intéressant de noter que le principe de superposition peut s'appliquer au cas où deux sources de natures différentes sont placées dans un circuit.

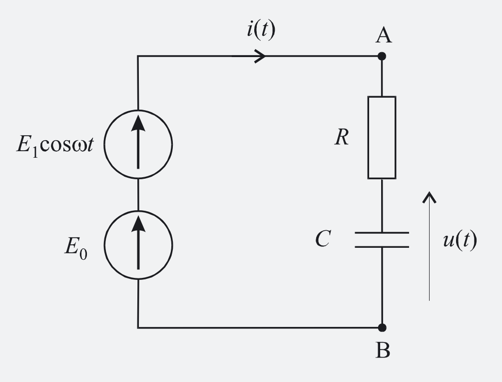


Figure 5.46

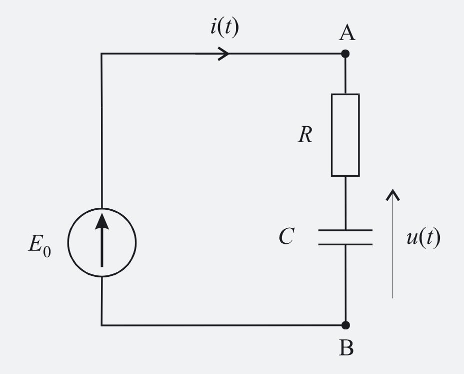


Figure 5.47

Court-circuitons dans un premier temps le générateur $E_1 \cos \omega t$ (figure 5.47). Soit $i_0(t)$ le courant dans le circuit et $u_0(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

Dans ce cas, aucun courant ne peut circuler dans le circuit puisque le condensateur, en régime continu, une fois chargé, se comporte comme un circuit ouvert.

On a donc :
$$\begin{cases} i_0(t) = 0 \\ u_0(t) = E_0 \end{cases}$$

Court-circuitons à présent le générateur E_0 et considérons notre circuit comme uniquement alimenté par $E_1 \cos \omega t$. Etablissons le modèle complexe du schéma électrique ainsi constitué (figure 5.48). Soit $i_1(t)$ le courant dans le circuit et $u_1(t)$ la tension aux bornes de C.

Soit $\overline{I}_1$ la forme complexe du courant $i_1(t)$ et soit $\overline{U}_1$ celle de la tension $u_1(t)$.

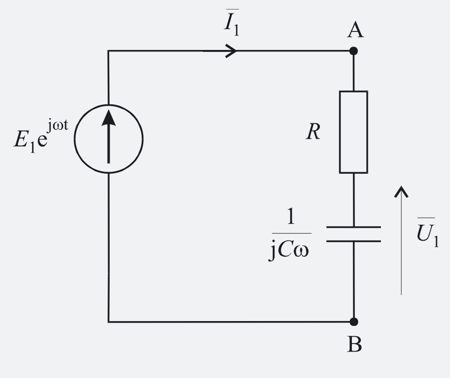


Figure 5.48

Posons :
$$\overline{I}_1 = I_{01} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

ce qui correspond à : $i_1(t) = I_{01}\cos(\omega t + \varphi)$

La loi d'Ohm appliquée au schéma de la figure 5.48 nous donne immédiatement :

$$\overline{I}_1 = \frac{E_1 e^{j\omega t}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega E_1 e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}$$

D'où l'on tire : $$I_{01} = \left|\frac{jC\omega E_1 e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}\right| = \frac{C\omega E_1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

Par ailleurs :

$$\omega t + \varphi = \arg\left(\frac{jC\omega E_1 e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}\right) = \arg(jC\omega) + \arg\left(E_1 e^{j\omega t}\right) - \arg(1 + jRC\omega)$$

Soit : $$\varphi = \arg(jC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan RC\omega$$

On en déduit donc l'expression du courant $i_1(t)$:

$$i_1(t) = \frac{C\omega E_1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan RC\omega\right)$$

Calculons à présent la tension $u_1(t)$. On a de toute évidence :

$$\overline{U}_1 = \frac{1}{jC\omega}\overline{I}_1$$

D'où : $$\overline{U}_1 = \frac{E_1 e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}$$

On peut écrire que : $$u_1(t) = \left|\overline{U}_1\right| e^{j\arg\overline{U}_1}$$

Or : $$\left|\overline{U}_1\right| = \frac{E_1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

et $$\arg\overline{U}_1 = \omega t - \arctan RC\omega$$

D'où : $$u_1(t) = \frac{E_1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t - \arctan RC\omega)$$

Appliquons pour finir le principe de superposition : en présence des deux générateurs, le courant total $i(t)$ dans le circuit a pour expression :

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t)$$

La tension aux bornes du condensateur vaut :

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t)$$

On a donc finalement :

$$i(t) = \frac{C\omega E_1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan RC\omega\right)$$

ou encore : $$i(t) = -\frac{C\omega E_1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}\sin(\omega t - \arctan RC\omega)$$

et $$u(t) = E_0 + \frac{E_1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega t - \arctan RC\omega)$$

Calculons la puissance instantanée délivrée par le générateur :

$$p(t) = e(t)i(t)$$

Soit : $$p(t) = -(E_0 + E_1 \cos \omega t)\,\frac{C\omega E_1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \sin(\omega t - \arctan RC\omega)$$

Pour alléger les expressions dans le calcul de la puissance moyenne, posons à nouveau :

$$\varphi = -\arctan RC\omega$$

On a donc : $$p(t) = -(E_0 + E_1 \cos \omega t)\,\frac{C\omega E_1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

ou $$p(t) = -\frac{C\omega E_1 E_0}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{C\omega E_1^2 \cos \omega t}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

La puissance moyenne fournie par le générateur, calculée sur une période a pour expression :

$$P = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p(t)\mathrm{d}t$$

D'où : $$P = -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{C\omega E_1 E_0}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t - \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{C\omega E_1^2 \cos \omega t}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$$

La première intégrale est nulle puisque la valeur moyenne de la fonction sinus sur une période est nulle. Donc : $$P = -\frac{\omega}{2\pi}\frac{C\omega E_1^2}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$$

$$P = -\frac{\omega}{2\pi}\frac{C\omega E_1^2}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}\left[\sin(2\omega t + \varphi) - \sin(-\varphi)\right]\mathrm{d}t$$

$$P = -\frac{\omega}{4\pi}\frac{C\omega E_1^2}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2\omega t + \varphi)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\varphi\mathrm{d}t\right]$$

Seule la seconde intégrale est non nulle ; on détermine alors facilement la puissance recherchée :

$$P = -\frac{\omega}{4\pi}\frac{C\omega E_1^2}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\varphi\mathrm{d}t = -\frac{\omega}{4\pi}\frac{C\omega E_1^2}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\frac{2\pi}{\omega}\sin\varphi$$

Soit : $$P = -\frac{C\omega E_1^2}{2\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\sin\varphi$$

En remplaçant finalement φ par sa valeur :

$$P = \frac{C\omega E_1^2}{2\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\sin(\arctan RC\omega)$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La puissance fournie par le générateur ne dépend pas de la composante continue E_0 du générateur. Ceci est normal puisque le courant dans le circuit ne possède pas de composante continue : dans notre modèle de la figure 5.46, le générateur E_0 ne fournit aucune puissance au dipôle alimenté.

Quadripôles en régime sinusoïdal

6

Mots-clés

quadripôle ▪ circuit de charge ▪ tension d'entrée ▪ tension de sortie ▪ courant d'entrée ▪ courant de sortie ▪ courant de court-circuit ▪ matrice de transfert ▪ matrice impédance ▪ matrice admittance ▪ matrices hybrides ▪ impédance d'entrée ▪ impédance de sortie ▪ schémas équivalents ▪ quadripôles en série ▪ quadripôles en parallèles ▪ quadripôles en cascade

En règle générale, un dispositif électrique est censé remplir une fonction particulière, par exemple la transformation d'un signal électrique, la conversion d'énergie électrique en une autre forme d'énergie, etc. Dans ces conditions, il est possible de décrire le circuit comme un système remplissant cette fonction et disposant d'une entrée et d'une sortie. Le modèle du quadripôle permet d'avoir une description plus macroscopique du fonctionnement d'un système électrique que l'approche composant par composant. Ce chapitre présente l'ensemble des outils liés à ce type de modélisation. Seuls les quadripôles en régime sinusoïdal sont abordés ici mais les concepts peuvent être étendus, avec d'autres outils mathématiques, sur des cas plus généraux.

Définitions et conventions

Un quadripôle est un circuit électrique possédant quatre bornes dont deux seront définies comme bornes d'entrée, les deux autres étant les bornes de sortie (figure 6.1).

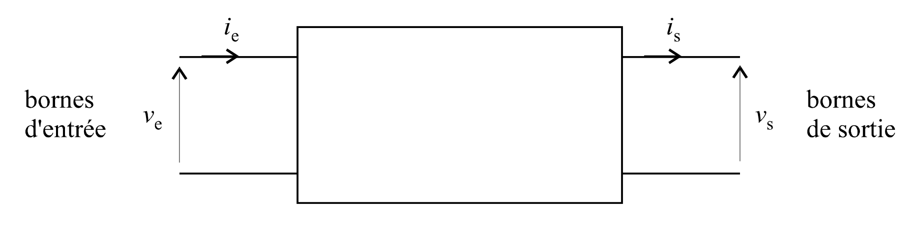


Figure 6.1

On définit à partir d'un tel circuit, quatre paramètres électriques : une tension d'entrée v_e, un courant d'entrée i_e, une tension de sortie v_s et un courant de sortie i_s. Les deux tensions v_e et v_s définies comme indiqué sur la figure 6.1, sont mesurées par rapport à des bornes de référence : une borne de référence à l'entrée et une borne de référence en sortie. En règle générale, ces deux bornes n'en forment qu'une seule et constituent la masse du circuit (potentiel 0 V). On remarque alors sur la figure 6.2, que les quadripôles ne sont en réalité pourvu que de trois bornes différentes. Toutefois, nous continuerons à les modéliser selon ce schéma à quatre bornes qui se prête mieux à la définition de tensions et courants d'entrée ou de sortie.

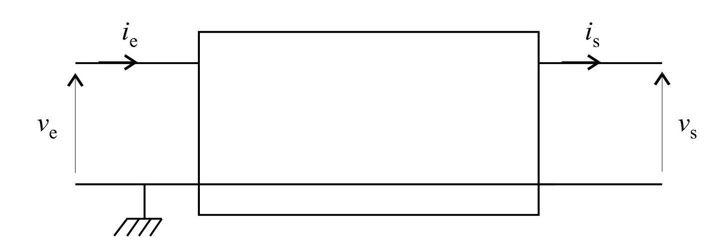


Figure 6.2

Les problèmes à résoudre nécessitent en général une bonne connaissance des relations existant entre les quatre paramètres électriques définis plus haut.

Les courants n'ont pas été orientés au hasard : l'orientation de i_e découle du choix de la convention récepteur pour la porte d'entrée du quadripôle. Celle de i_s correspond à la convention générateur. Ces choix sont tout à fait pertinents, car les quadripôles interviennent dans des circuits comme celui de la figure 6.3. L'entrée du quadripôle est en général alimentée par un circuit amont, tandis que la sortie du quadripôle alimente un circuit aval, appelé *circuit de charge*. Ce circuit de charge est parfois une simple résistance de charge. Il peut s'agir également d'un deuxième quadripôle.

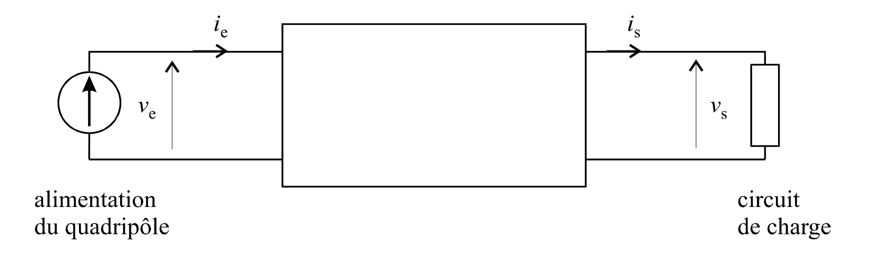


Figure 6.3

Nous nous limiterons à l'étude des quadripôles en régime sinusoïdal, composés uniquement d'éléments passifs linéaires (résistances, condensateurs et auto-inductances). D'une manière générale, on supposera que les quadripôles étudiés sont alimentés, à leur entrée, par une source de tension sinusoïdale.

Par exemple : $$v_e(t) = V_{e,eff}\sqrt{2}\cos\omega t$$

> Ainsi, comme cela est la règle en régime sinusoïdal, tous les courants et tensions dans le circuit, en particulier les courants i_e et i_s, ainsi que la tension v_s, seront sinusoïdaux, de même pulsation ω.

Important. La définition du quadripôle s'accompagne d'une contrainte importante : on ne peut véritablement parler de quadripôle qu'à la condition expresse que le port d'entrée d'une part et le port de sortie d'autre part, puissent être considérés comme des dipôles, autrement dit, en se référant au schéma de la figure 6.1, le courant sortant de la borne inférieure gauche doit être égal à i_e et le courant entrant par la borne inférieure droite doit être égal à i_s.

Fiche 2

Modèles associés aux quadripôles

Les quadripôles étant étudiés en régime sinusoïdal, nous associons au circuit son modèle complexe. v_e, v_s, i_e et i_s seront également associées à leur forme complexe (figure 6.4). Les problèmes liés aux quadripôles nécessitant la connaissance de relations entre $\overline{V}_e$, $\overline{I}_e$, $\overline{V}_s$ et $\overline{I}_s$, nous devrons, en général, à partir de deux de ces grandeurs, déterminer les deux autres.



Figure 6.4

1. Matrice de transfert

Dans un premier temps, il semble naturel de chercher à exprimer les deux grandeurs de sortie en fonction des deux grandeurs d'entrée. Comme nous ne nous intéressons qu'à des circuits linéaires, nous retrouvons cette linéarité dans les équations qui expriment $\overline{V}_s$ et $\overline{I}_s$ en fonction de $\overline{V}_e$ et $\overline{I}_e$.

Ces équations ont la forme suivante :

$$\overline{V}_s = \overline{T}_{11}\overline{V}_e + \overline{T}_{12}\overline{I}_e$$
$$\overline{I}_s = \overline{T}_{21}\overline{V}_e + \overline{T}_{22}\overline{I}_e$$

Les coefficients $\overline{T}_{ij}$ sont évidemment complexes, dans le cas le plus général. Par ailleurs, ils ne correspondent pas tous à la même grandeur. Ainsi, $\overline{T}_{11}$ est sans dimension, puisque reliant $\overline{V}_s$ à $\overline{V}_e$, tandis que $\overline{T}_{12}$ est homogène à une impédance complexe.

Ces deux équations peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{cases}\overline{V}_s = \overline{T}_{11}\overline{V}_e + \overline{T}_{12}\overline{I}_e \\ \overline{I}_s = \overline{T}_{21}\overline{V}_e + \overline{T}_{22}\overline{I}_e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{V}_s \\ \overline{I}_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{T}_{11} & \overline{T}_{12} \\ \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ \overline{I}_e\end{pmatrix} = \left(\overline{T}\right)\begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ \overline{I}_e\end{pmatrix}$$

On définit ainsi la matrice de transfert $\left(\overline{T}\right)$ du quadripôle.

On peut définir de la même manière d'autres matrices caractéristiques du quadripôle, selon qu'on cherche à relier tel couple de grandeurs à tel autre couple.

2. Matrice impédance

En exprimant les deux tensions $\overline{V}_e$ et $\overline{V}_s$ en fonction des deux courants $\overline{I}_e$ et $\overline{I}_s$, on obtient les relations suivantes :

$$\overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e - \overline{Z}_{12}\overline{I}_s$$
$$\overline{V}_s = \overline{Z}_{21}\overline{I}_e - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s$$

Nous avons utilisé des notations $\overline{Z}_{ij}$ car chacun de ces coefficients est bien homogène à une impédance.

On définit alors la matrice impédance $\left(\overline{Z}\right)$ du quadripôle :

$$\begin{cases}\overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e - \overline{Z}_{12}\overline{I}_s \\ \overline{V}_s = \overline{Z}_{21}\overline{I}_e - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ -\overline{I}_s\end{pmatrix} = \left(\overline{Z}\right)\begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ -\overline{I}_s\end{pmatrix}$$

> Le signe moins devant $\overline{I}_s$ est introduit de manière à pouvoir rendre compte d'une symétrie dans le quadripôle. Ce signe négatif permettra alors de retrouver cette symétrie dans la matrice.

3. Matrice admittance

La matrice admittance est simplement définie comme la matrice inverse de la matrice impédance :

$$\begin{cases}\overline{I}_e = \overline{Y}_{11}\overline{V}_e + \overline{Y}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{Y}_{21}\overline{V}_e + \overline{Y}_{22}\overline{V}_s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ -\overline{I}_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix} = \left(\overline{Y}\right)\begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix}$$

4. Matrice de transfert inverse

La matrice de transfert inverse permet d'exprimer les grandeurs d'entrée en fonction des grandeurs de sortie. Il s'agit, comme son nom l'indique, de l'inverse de la matrice $(\overline{T})$. Les relations obtenues sont les suivantes :

$$\begin{cases}\overline{V}_e = \overline{K}_{11}\overline{V}_s + \overline{K}_{12}\overline{I}_s \\ \overline{I}_e = \overline{K}_{21}\overline{V}_s + \overline{K}_{22}\overline{I}_s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ \overline{I}_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{V}_s \\ \overline{I}_s\end{pmatrix} = (\overline{K})\begin{pmatrix}\overline{V}_s \\ \overline{I}_s\end{pmatrix}$$

Avec : $$(\overline{K}) = (\overline{T})^{-1}$$

5. Matrices hybrides

Les matrices hybrides $(\overline{G})$ et $(\overline{H})$ sont définies par :

$$\begin{cases}\overline{I}_e = \overline{G}_{11}\overline{V}_e - \overline{G}_{12}\overline{I}_s \\ \overline{V}_s = \overline{G}_{21}\overline{V}_e - \overline{G}_{22}\overline{I}_s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{G}_{11} & \overline{G}_{12} \\ \overline{G}_{21} & \overline{G}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ -\overline{I}_s\end{pmatrix} = (\overline{G})\begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ -\overline{I}_s\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\overline{V}_e = \overline{H}_{11}\overline{I}_e + \overline{H}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{H}_{21}\overline{I}_e + \overline{H}_{22}\overline{V}_s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ -\overline{I}_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{H}_{11} & \overline{H}_{12} \\ \overline{H}_{21} & \overline{H}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix} = (\overline{H})\begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix}$$

On a évidemment : $$(\overline{H}) = (\overline{G})^{-1}$$

Le lecteur pourra être surpris de la définition de telles matrices qui ne semblent pas refléter le fonctionnement logique du quadripôle. Toutefois, les différentes formes de matrices définies ci-dessus peuvent s'avérer fort utiles pour résoudre de nombreux problèmes.

Fiche 3

Impédances d'entrée et de sortie

1. Impédance d'entrée

La notion d'impédance d'entrée permet de décrire comment le quadripôle est ń vu ż depuis sa porte d'entrée. Dans le cas général, considérons que le quadripôle est relié à une impédance de charge (figure 6.5). Depuis sa porte d'entrée, le quadripôle apparaît toujours comme une impédance équivalente au circuit composé du quadripôle lui-même et de la charge $\overline{Z}_c$ qu'il alimente. Cette impédance équivalente est appelée *impédance d'entrée* et se note $\overline{Z}_e$.

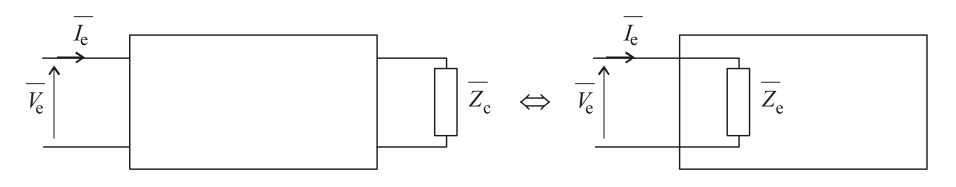


Figure 6.5

Cette définition implique évidemment la relation : $\frac{\overline{V}_e}{\overline{I}_e} = \overline{Z}_e$

Attention : contrairement à une idée reçue, l'impédance d'entrée n'est pas une caractéristique intrinsèque du quadripôle puisqu'elle dépend toujours de l'impédance de la charge connectée à la sortie du quadripôle. En revanche, les matrices caractéristiques définies plus haut ne dépendent que du quadripôle et non de la charge qui lui est connectée.

2. Impédance de sortie

L'impédance de sortie est un paramètre qui permet de décrire le quadripôle « vu » de sa porte de sortie. Dans le cas général, un quadripôle est alimenté à son entrée et l'ensemble du circuit, au niveau de la porte de sortie, peut être modélisé par un générateur de Thévenin équivalent (figure 6.6).

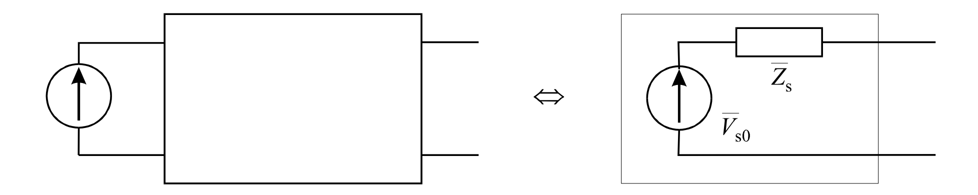


Figure 6.6

Ce générateur est constitué d'un générateur de tension parfait $\overline{V}_{s0}$ placé en série avec une impédance $\overline{Z}_s$. $\overline{V}_{s0}$ est appelée *tension de sortie à vide* du quadripôle puisqu'on a $\overline{V}_s = \overline{V}_{s0}$ lorsque $\overline{I}_s = 0$ (figure 6.7). $\overline{Z}_s$ est appelée *impédance de sortie* du quadripôle.

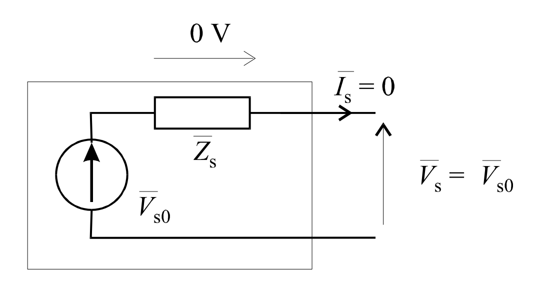


Figure 6.7

Attention : ne pas croire que $\overline{Z}_s$ est égale à $\frac{\overline{V}_s}{\overline{I}_s}$. Par contre, lorsque les bornes d'entrée sont court-circuitées, on a $\overline{Z}_s = -\frac{\overline{V}_s}{\overline{I}_s}$.

Schémas équivalents des quadripôles

Les différents modèles du quadripôle (matrices impédance, admittance, transmittance, etc., impédances d'entrée et de sortie) permettent de construire différents schémas équivalents d'un quadripôle quelconque.

1. Schéma équivalent à partir de la matrice impédance

Les équations :
$$\begin{cases} \overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e - \overline{Z}_{12}\overline{I}_s \\ \overline{V}_s = \overline{Z}_{21}\overline{I}_e - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s \end{cases}$$

se traduisent en un schéma équivalent proposé sur la figure 6.8.

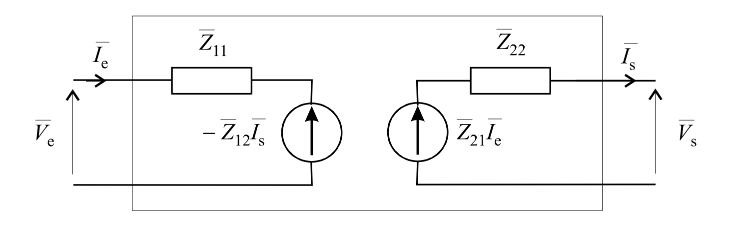


Figure 6.8

2. Schéma équivalent à partir de la matrice admittance

Les équations :
$$\begin{cases} \overline{I}_e = \overline{Y}_{11}\overline{V}_e + \overline{Y}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{Y}_{21}\overline{V}_e + \overline{Y}_{22}\overline{V}_s \end{cases}$$

se traduisent en un schéma équivalent proposé sur la figure 6.9.

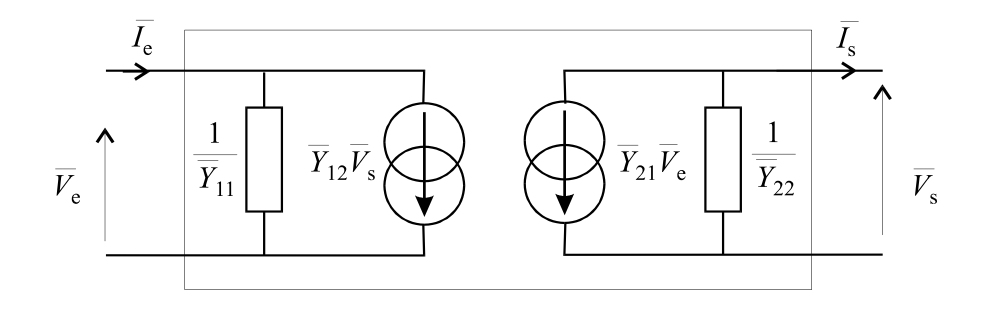


Figure 6.9

3. Schéma équivalent à partir des impédances d'entrée et de sortie

Bien que les impédances d'entrée et de sortie d'un quadripôle dépendent respectivement de la charge connectée à la sortie et du générateur connecté à l'entrée, il est possible de proposer un schéma équivalent faisant intervenir ces deux paramètres (figure 6.10).

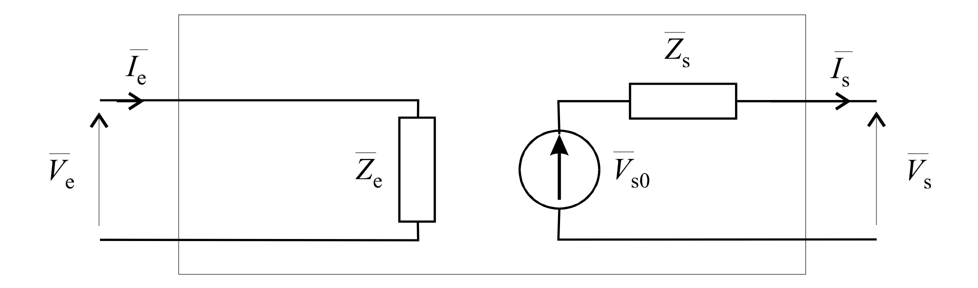


Figure 6.10

Fiche 5

Associations de quadripôles

Il existe trois types d'association de quadripôles : association en parallèle, en série et en cascade.

> Ne pas confondre l'association en série et l'association en cascade !

1. Association de deux quadripôles en parallèle

L'association de deux quadripôles en parallèle consiste à relier les bornes des deux quadripôles deux à deux afin de constituer un nouveau quadripôle (figure 6.11).

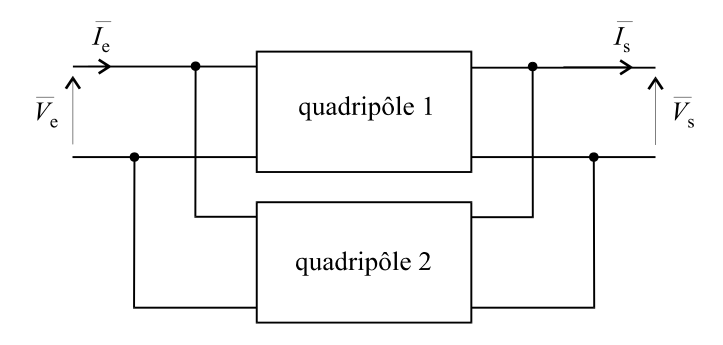


Figure 6.11

La mise en parallèle de deux quadripôles se traduit par l'addition des matrices admittances.

Soient (Y') la matrice admittance du quadripôle 1 et (Y'') celle du quadripôle 2. La matrice admittance (Y) du quadripôle équivalent est :

$$(Y) = (Y') + (Y'')$$

> **Important.** On ne peut placer des quadripôles en parallèle que s'ils sont caractérisés, chacun, indépendamment, par la même tension de sortie. À défaut de quoi, l'ensemble ne peut plus être modélisé comme un quadripôle.

2. Association de deux quadripôles en série

Soient deux quadripôles 1 et 2 possédant respectivement des matrices impédance (Z') et (Z'') et associés en série (figure 6.12).

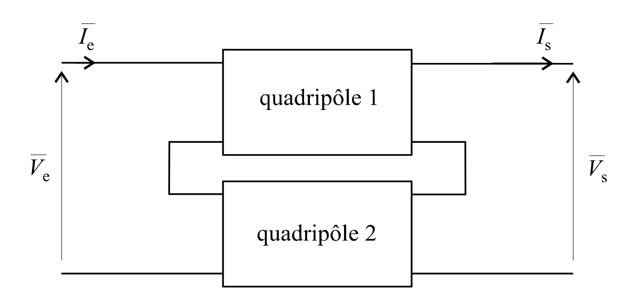


Figure 6.12

Le quadripôle équivalent à cette association possède une matrice impédance (Z) telle que :

$$(Z) = (Z') + (Z'')$$

3. Association de deux quadripôles en cascade

Soit deux quadripôles associés en cascade comme indiqué sur la figure 6.13.

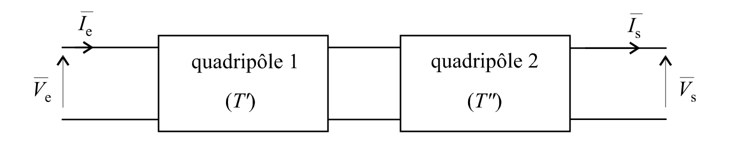


Figure 6.13

La matrice de transfert équivalente (T) de cette association est égale au produit de la matrice de transfert du second, soit (T''), par celle du premier, soit (T') :

$$(T) = (T'') \cdot (T')$$

> Ne pas oublier que la multiplication matricielle n'est pas commutative et que le quadripôle résultant de la mise en cascade de deux quadripôles dépend de l'ordre selon lequel ils sont placés.

Entraînement

QCM

1. Laquelle de ces matrices de transfert est, par nature, fausse ?

❑ a. $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 2 & R \\ jC\omega & 1 \end{pmatrix}$

❑ b. $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 2 & jC\omega \\ R & 1 \end{pmatrix}$

❑ c. $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{jC\omega} \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$

❑ d. $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$

2. Un quadripôle est défini par sa matrice de transfert $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de transfert inverse est égale à :

❑ a. $(\bar{T})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$

❑ b. $(\bar{T})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R} & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{R} \end{pmatrix}$

❑ c. $(\bar{T})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

❑ d. La matrice de transfert inverse n'existe pas.

3. Un quadripôle est défini par sa matrice impédance $(\bar{Z}) = \begin{pmatrix} 2R & R \\ R & \dfrac{R}{2} \end{pmatrix}$. La matrice de transfert inverse est égale à :

❑ a. $(\bar{Y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2R} & -\dfrac{1}{R} \\ -\dfrac{1}{R} & \dfrac{2}{R} \end{pmatrix}$

❑ b. $(\bar{Y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2R} & -\dfrac{1}{R} \\ -\dfrac{1}{R} & \dfrac{2}{R} \end{pmatrix}$

❑ c. $(\bar{Y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2R} & -\dfrac{1}{R} \\ -\dfrac{1}{R} & \dfrac{2}{R} \end{pmatrix}$

❑ d. La matrice admittance n'existe pas.

4. Un quadripôle quelconque possède une matrice impédance $(\bar{Z}) = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix}$. Si on court-circuite les bornes d'entrées, les équations de fonctionnement du quadripôle deviennent :

❑ a. $\begin{cases} \bar{V}_e = -\bar{Z}_{12}\bar{I}_s \\ \bar{V}_s = -\bar{Z}_{22}\bar{I}_s \end{cases}$

❑ b. $\begin{cases} 0 = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e \\ \bar{V}_s = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e \end{cases}$

❑ c. $\begin{cases} 0 = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e - \bar{Z}_{12}\bar{I}_s \\ \bar{V}_s = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e - \bar{Z}_{22}\bar{I}_s \end{cases}$

❑ d. $\begin{cases} \bar{V}_e = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e \\ \bar{V}_s = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e - \bar{Z}_{22}\bar{I}_s \end{cases}$

5. **Un quadripôle quelconque possède une matrice de transfert $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix}$. Si on court-circuite les bornes d'entrées, les équations de fonctionnement du quadripôle deviennent :**

❑ a. $\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{T}_{11}\bar{V}_e \\ \bar{I}_s = \bar{T}_{21}\bar{V}_e \end{cases}$

❑ b. $\begin{cases} 0 = \bar{T}_{11}\bar{V}_e + \bar{T}_{12}\bar{I}_e \\ \bar{I}_s = \bar{T}_{21}\bar{V}_e + \bar{T}_{22}\bar{I}_e \end{cases}$

❑ c. $\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{T}_{12}\bar{I}_e \\ \bar{I}_s = \bar{T}_{22}\bar{I}_e \end{cases}$

❑ d. $\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{T}_{11}\bar{V}_e + \bar{T}_{12}\bar{I}_e \\ 0 = \bar{T}_{21}\bar{V}_e + \bar{T}_{22}\bar{I}_e \end{cases}$

6. **Un quadripôle quelconque possède une matrice impédance $(\bar{Z}) = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix}$. Si aucun circuit de charge n'est connecté à sa sortie, quelles sont les équations de fonctionnement de ce quadripôle ?**

❑ a. $\begin{cases} \bar{V}_e = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e - \bar{Z}_{12}\bar{I}_s \\ 0 = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e - \bar{Z}_{22}\bar{I}_s \end{cases}$

❑ b. $\begin{cases} 0 = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e - \bar{Z}_{12}\bar{I}_s \\ \bar{V}_s = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e - \bar{Z}_{22}\bar{I}_s \end{cases}$

❑ c. $\begin{cases} 0 = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e - \bar{Z}_{12}\bar{I}_s \\ 0 = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e - \bar{Z}_{22}\bar{I}_s \end{cases}$

❑ d. $\begin{cases} \bar{V}_e = \bar{Z}_{11}\bar{I}_e \\ \bar{V}_s = \bar{Z}_{21}\bar{I}_e \end{cases}$

7. **Un quadripôle possède une matrice de transfert $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{R_0} & 1 \end{pmatrix}$. Une résistance de charge R_c est connectée à ses bornes de sortie. Quelle est la valeur de l'impédance d'entrée du quadripôle ?**

❑ a. $\bar{Z}_e = \dfrac{R_0 R_c}{R_0 + R_c}$

❑ b. $\bar{Z}_e = R_0 + R_c$

❑ c. $\bar{Z}_e = R_c$

❑ d. $\bar{Z}_e = R_0$

8. **Un quadripôle possède une matrice de transfert $(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $R = 100\ \Omega$. Une résistance de charge $R_c = 50\ \Omega$ est connectée à ses bornes de sortie. Un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace $E_{eff} = 20$ V alimente le quadripôle. Quelle est la valeur efficace du courant d'entrée du quadripôle ?**

❑ a. $I_{eff} = 600$ mA

❑ b. $I_{eff} = 133$ mA

❑ c. $I_{eff} = 200$ mA

❑ d. $I_{eff} = 400$ mA

Fiches | QCM | Vrai ou faux | Exercices

6. Quadripôles en régime sinusoïdal

Réponses

1. **b.**

La matrice de transfert $\left(\bar{T}\right) = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix}$ est définie à partir des équations $\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{T}_{11}\bar{V}_e + \bar{T}_{12}\bar{I}_e \\ \bar{I}_s = \bar{T}_{21}\bar{V}_e + \bar{T}_{22}\bar{I}_e \end{cases}$ dans lesquelles on note que les paramètres $\bar{T}_{11}$ et $\bar{T}_{22}$ sont des complexes sans dimension, que $\bar{T}_{12}$ est homogène à une impédance et que $\bar{T}_{21}$ est homogène à une admittance autrement dit à l'inverse d'une impédance. Parmi les solutions proposées, seule la matrice $\left(\bar{T}\right) = \begin{pmatrix} 2 & jC\omega \\ R & 1 \end{pmatrix}$ ne respecte pas l'homogénéité des expressions.

2. **a.**

Rappelons tout d'abord que l'inverse d'une matrice carrée 2×2 se calcule de la manière suivante, à condition que son déterminant soit non nul .

$$(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A)^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dans le cas présent, $\det\left(\bar{T}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix} = 1$. La matrice est donc inversible et on a :

$$\left(\bar{T}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

3. **d.**

La matrice admittance est l'inverse de la matrice impédance, à condition que cette dernière soit inversible, donc que son déterminant soit non nul. On a ici $\det\left(\bar{Z}\right) = \det\begin{pmatrix} 2R & R \\ R & \frac{R}{2} \end{pmatrix} = \left(2R \times \frac{R}{2}\right) - R^2 = 0$. La matrice admittance, par conséquent, n'existe pas.

4. **c.**

Lorsque l'on court-circuite les bornes d'entrée d'un quadripôle, on lui impose naturellement une tension d'entrée nulle. Cela revient à poser $\bar{V}_e = 0$ dans les équations caractéristiques du quadripôle.

5. **c.**

Lorsque l'on court-circuite les bornes d'entrée d'un quadripôle, on lui impose naturellement une tension d'entrée nulle. Cela revient à poser $\bar{V}_e = 0$ dans les équations caractéristiques du quadripôle.

6. **d.**

Sans circuit de charge, la sortie du quadripôle se trouve en circuit ouvert et aucun courant de sortie ne peut circuler. Cela revient à poser $\bar{I}_s = 0$ dans les équations caractéristiques du quadripôle.

7. **a.**

Les équations de fonctionnement du quadripôle sont : $\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{V}_e \\ \bar{I}_s = -\dfrac{\bar{V}_e}{R_0} + \bar{I}_e \end{cases}$. On a par ailleurs : $\bar{V}_s = R_c\bar{I}_s$, donc $\bar{V}_e = R_c\bar{I}_s$. L'impédance d'entrée est définie par $\bar{Z}_e = \dfrac{\bar{V}_e}{\bar{I}_e}$ On en déduit :

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{V}_e}{\bar{I}_e} = \frac{R_c\bar{I}_s}{\bar{I}_s + \frac{\bar{V}_e}{R_0}} = \frac{R_c\bar{I}_s}{\bar{I}_s + \frac{R_c\bar{I}_s}{R_0}} = \frac{R_c}{1 + \frac{R_c}{R_0}} = \frac{R_0R_c}{R_0 + R_c}.$$

8. **b.**

Les équations de fonctionnement du quadripôle sont : $\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{V}_e - R\bar{I}_e \\ \bar{I}_s = \bar{I}_e \end{cases}$. On a par ailleurs $\bar{V}_s = R_c\bar{I}_s = R_c\bar{I}_e$. On en déduit alors : $R_c\bar{I}_e = \bar{V}_e - R\bar{I}_e$, soit $\bar{I}_e = \dfrac{\bar{V}_e}{R_c + R}$.

Par conséquent, $I_{eff} = \dfrac{V_{eff}}{R_c + R} = \dfrac{20}{100 + 50} = 133$ mA.

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	Le circuit de charge d'un quadripôle est toujours représenté avec la convention récepteur.	☐	☐
2.	Lorsqu'un quadripôle est alimenté à son entrée par une source sinusoïdale de pulsation ω, sa tension de sortie est sinusoïdale de même pulsation.	☐	☐
3.	Une admittance est l'inverse d'une résistance.	☐	☐
4.	Les 4 coefficients de la matrice de transfert d'un quadripôle sont tous homogènes à des impédances.	☐	☐
5.	Tout quadripôle possède une matrice admittance.	☐	☐
6.	L'impédance d'entrée d'un quadripôle dépend de la charge qui est placée à sa sortie.	☐	☐
7.	L'impédance d'entrée d'un quadripôle est telle que $\bar{Z}_e = \dfrac{\bar{V}_e}{\bar{I}_e}$.	☐	☐
8.	L'impédance de sortie d'un quadripôle est telle que $\bar{Z}_s = \dfrac{\bar{V}_s}{\bar{I}_s}$.	☐	☐
9.	L'impédance de sortie d'un quadripôle correspond au coefficient $\bar{Z}_{22}$ de sa matrice impédance.	☐	☐
10.	La tension de sortie à vide d'un quadripôle est la tension délivrée aux bornes de sortie lorsque l'entrée du quadripôle est court-circuitée.	☐	☐
11.	La matrice impédance d'un quadripôle dépend de la charge connectée à sa sortie.	☐	☐
12.	Le schéma équivalent d'un quadripôle correspond à un quadripôle simplifié qui possèderait les mêmes équations de fonctionnement.	☐	☐
13.	Dans le schéma équivalent d'un quadripôle établi à partir de sa matrice admittance, l'admittance de sortie est égale à $\dfrac{1}{\bar{Y}_{22}}$.	☐	☐
14.	La puissance moyenne consommée par un quadripôle alimenté par une source sinusoïdale correspond à la puissance moyenne consommée dans sa résistance de charge.	☐	☐
15.	En plaçant deux quadripôles en cascade, les matrices de transfert se multiplient.	☐	☐
16.	Lorsque deux quadripôles sont placés en parallèle, les matrices admittances se multiplient.	☐	☐

Réponses

1. **Vrai.** On considère qu'il est alimenté par la sortie du quadripôle qui, elle, est en convention générateur. Mais le circuit de charge, quant à lui, doit toujours respecter la convention récepteur.
2. **Vrai.** C'est le principe général des régimes sinusoïdaux dans le cas où les éléments du circuit sont tous linéaires.
3. **Faux.** Une admittance est l'inverse d'une impédance.
4. **Faux.** Le système d'équation $\begin{cases} \bar{V}_s = \bar{T}_{11}\bar{V}_e + \bar{T}_{12}\bar{I}_e \\ \bar{I}_s = \bar{T}_{21}\bar{V}_e + \bar{T}_{22}\bar{I}_e \end{cases}$ montre de toute évidence que les paramètres $\bar{T}_{11}$ et $\bar{T}_{22}$ sont des complexes sans dimension, que $\bar{T}_{12}$ est homogène à une impédance et que $\bar{T}_{21}$ est homogène à une admittance.
5. **Faux.** Comme la matrice admittance est définie comme l'inverse de la matrice impédance, encore faut-il que cette matrice impédance soit inversible, donc que son déterminant soit non nul. Dans le cas contraire, la matrice admittance n'existe pas.
6. **Vrai.** L'impédance d'entrée est l'impédance de l'ensemble du circuit, vue de ses bornes d'entrée. La charge placée en sortie faisant partie intégrante du circuit aval, elle influe naturellement sur cette impédance d'entrée.
7. **Vrai.** Rappelons que l'impédance d'entrée d'un quadripôle dépend des éléments qui le composent et de la charge placée à sa sortie. C'est donc elle qui impose la relation $\bar{Z}_e = \dfrac{\bar{V}_e}{\bar{I}_e}$, c'est-à-dire qui impose par exemple le courant $\bar{I}_e$ lorsqu'une tension d'entrée $\bar{V}_e$ est imposée à l'entrée.
8. **Faux.** L'impédance de sortie est l'impédance de Thévenin en sortie du quadripôle, c'est-à-dire l'impédance vue entre les bornes de sortie lorsque les bornes d'entrée sont court-circuitées et que toutes les sources internes, s'il y en a, sont éteintes également.
9. **Vrai.** Le schéma de la figure 6.8 montre bien que $\bar{Z}_{22}$ joue le même rôle que $\bar{Z}_s$.
10. **Faux.** La tension de sortie à vide d'un quadripôle correspond à sa tension de sortie lorsque le quadripôle n'est relié à aucun circuit de charge, autrement dit lorsque $\bar{I}_s$ est nul.
11. **Faux.** La matrice impédance d'un quadripôle, tout comme ses autres matrices caractéristiques, est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que des composants internes du dispositif.
12. **Vrai.** C'est la définition même de la notion de schéma équivalent. On cherche uniquement à avoir une représentation théorique des équations de fonctionnement du quadripôle.
13. **Faux.** Dans ce type de schéma équivalent, l'admittance de sortie est $\bar{Y}_{22}$, pas son inverse qui, elle, est une impédance.
14. **Faux.** Comme dans tout circuit fonctionnant en régime sinusoïdal, la puissance moyenne consommée est égale à la puissance consommée par tous les éléments résistifs du circuit, donc bien sûr, la résistance de charge s'il y en a une mais aussi toutes les résistances internes du quadripôle.
15. **Vrai.** Mais attention à l'ordre de la multiplication matricielle qui n'est pas commutative.
16. **Faux.** Les matrices admittances s'additionnent.

Entraînement

Exercices

1. Matrice de transfert d'un quadripôle simple *

On considère le quadripôle représenté sur la figure 6.14. Établir les relations liant $\overline{V}_s$ et $\overline{I}_s$ à $\overline{V}_e$ et $\overline{I}_e$. En déduire la matrice de transfert (T) de ce quadripôle.

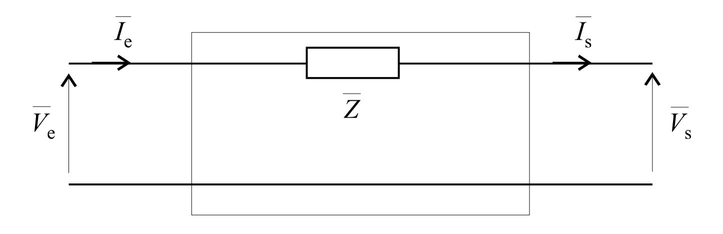


Figure 6.14

Conseil méthodologique

Comme on cherche la matrice de transfert du quadripôle, il faut s'attacher à écrire, dans le schéma électrique, les équations qui lient les grandeurs de sortie aux grandeurs d'entrée. L'équation qui lie le courant de sortie au courant d'entrée est immédiate et il suffit d'écrire la loi d'Ohm pour déterminer la seconde équation. Une fois les équations posées, il suffit de les placer sous forme matricielle.

2. Matrice admittance d'un quadripôle simple *

Déterminer la matrice admittance du quadripôle étudié dans l'exercice précédent (figure 6.14).
On posera les équations *a priori* et on procédera à une identification des coefficients $\overline{Y}_{ij}$ en court-circuitant successivement les bornes d'entrée puis de sortie.
Montrer que ce quadripôle ne possède pas de matrice impédance.

Conseil méthodologique

Ici, on posera l'équation matricielle *a priori* et on cherchera à identifier chaque coefficient pour des valeurs particulières des tensions d'entrée ou de sortie. Ainsi, si on court-circuite les bornes d'entrée, la tension d'entrée est nulle et les équations du quadripôle s'en trouvent simplifiées, permettant ainsi l'identification de deux des coefficients. On procédera de la même manière avec les bornes de sortie.

3. Matrice de transfert d'un quadripôle constitué d'une admittance en parallèle *

On considère le quadripôle représenté sur la figure 6.15. Établir les relations liant $\overline{V}_s$ et $\overline{I}_s$ à $\overline{V}_e$ et $\overline{I}_e$. En déduire la matrice de transfert (T) de ce quadripôle.

Lorsqu'une impédance est placée en parallèle par rapport au reste du circuit (ici par rapport aux bornes d'entrée et de sortie), on utilise plutôt son inverse, l'admittance $\overline{Y}$. Dans notre schéma, nous avons représenté l'impédance $1/\overline{Y}$ mais il arrive très souvent qu'on mentionne directement $\overline{Y}$ dans le schéma, à côté du symbole traditionnel de l'impédance, en n'oubliant pas qu'il ne s'agit pas de la valeur de l'impédance mais de son inverse.

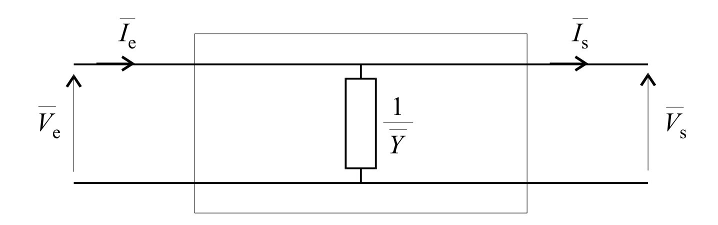


Figure 6.15

Conseil méthodologique

On utilisera la même technique que dans l'exercice 6.1 : l'application des lois simples de l'électricité conduit immédiatement à deux équations que l'on organisera pour faire apparaître les équations de la matrice de transfert.

4. Matrice impédance d'un quadripôle constitué d'une admittance en parallèle *

Déterminer la matrice impédance du quadripôle étudié dans l'exercice précédent (figure 6.15). Montrer que ce quadripôle ne possède pas de matrice admittance.

Conseil méthodologique

Nous suggérons ici de poser les équations *a priori* et d'identifier les coefficients à partir de valeurs particulières des grandeurs électriques. On s'inspirera de ce qui a été fait dans l'exercice 6.2 mais on supposera ici, successivement, que les courants d'entrée et de sortie sont nuls.

5. Impédance d'entrée d'un quadripôle capacitif en charge *

Déterminer l'impédance d'entrée $\overline{Z}_e$ du quadripôle représenté sur la figure 6.16, alimentant une charge résistive pure $\overline{Z}_c = R$.

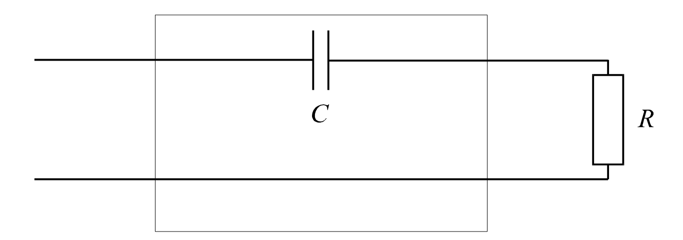


Figure 6.16

Conseil méthodologique

Le modèle complexe du schéma électrique est très simple et l'impédance d'entrée se calcule sans effort à partir de sa définition.

6. Impédance d'entrée d'un quadripôle en pi *

Déterminer l'impédance d'entrée $\overline{Z}_e$ du quadripôle représenté sur la figure 6.17, alimentant une charge résistive pure $\overline{Z}_c = R$.

Conseil méthodologique

Le calcul de l'impédance d'entrée se résume au calcul de l'impédance complexe équivalente du montage.

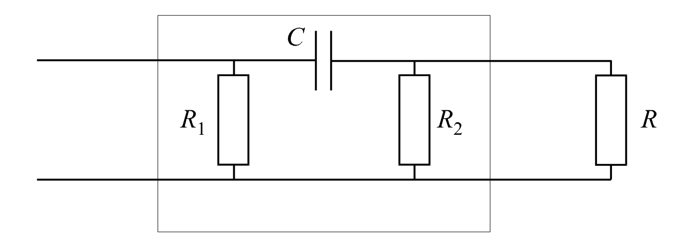


Figure 6.17

7. Impédance d'entrée d'un quadripôle en té *

Déterminer l'impédance de sortie $\overline{Z}_s$ du quadripôle représenté sur la figure 6.18, celui-ci étant alimenté par un générateur parfait délivrant une tension $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$.

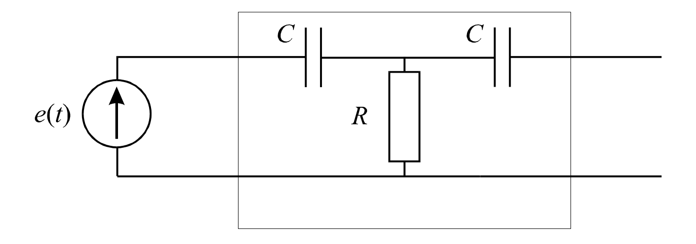


Figure 6.18

Conseil méthodologique

L'impédance de sortie d'un quadripôle correspond à l'impédance équivalente de Thévenin vue des bornes de sortie. On court-circuitera donc le générateur et on évaluera l'impédance équivalente du montage restant.

8. Étude de l'influence de la résistance interne du générateur d'entrée sur l'impédance de sortie d'un quadripôle **

Déterminer l'impédance de sortie $\overline{Z}_s$ du quadripôle représenté sur la figure 6.19, celui-ci étant alimenté par un générateur délivrant une tension $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ et possédant une résistance interne r.

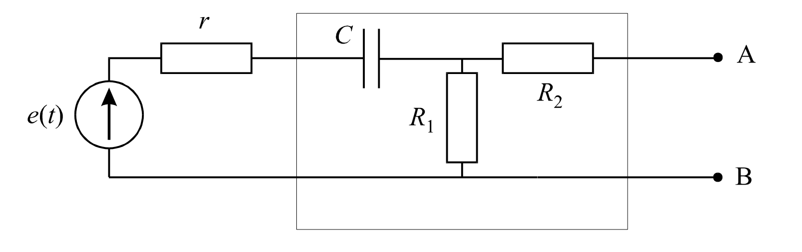


Figure 6.19

Conseil méthodologique

Mêmes conseils que pour l'exercice 6.7. Il faut néanmoins tenir compte, ici, de la résistance interne du générateur. On ne court-circuite en effet que le générateur parfait placé en série avec cette résistance interne.

9. Méthode de mesure d'une impédance de sortie **

Un quadripôle quelconque possédant une impédance de sortie purement résistive $\overline{Z}_s = R_s$ est alimenté par une source de tension sinusoïdale. On effectue une mesure de la valeur efficace de la tension de sortie à vide : soit $V_{s0_{eff}}$.

On relie ensuite les bornes de sortie de ce quadripôle à une résistance de charge R_c variable (figure 6.20). On ajuste R_c de manière à mesurer une valeur efficace de la tension de sortie égale à $\frac{V_{s0_{eff}}}{2}$. Montrer que cette valeur de R_c est égale à l'impédance de sortie R_s du quadripôle.

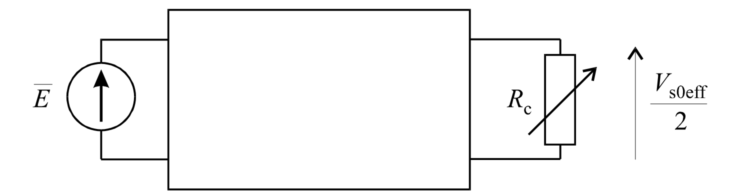


Figure 6.20

Conseil méthodologique

Tracer le schéma équivalent du montage proposé en faisant intervenir la tension de sortie à vide et la résistance de sortie du quadripôle. On exprimera ensuite la tension de sortie en fonction de la tension de sortie à vide à l'aide du théorème de Millman.

10. Détermination d'une matrice de transfert par décomposition en cascade **

Déterminer la matrice de transfert du quadripôle représenté sur la figure 6.21.

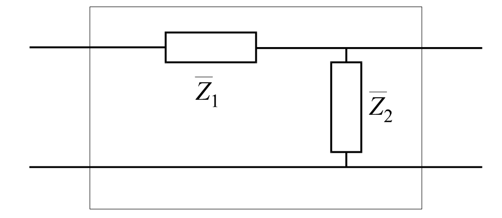


Figure 6.21

Conseil méthodologique

Le quadripôle proposé correspond à la mise en cascade de deux quadripôles simples.

11. Détermination d'une matrice de transfert par décomposition en cascade **

Déterminer la matrice de transfert du quadripôle représenté sur la figure 6.22.

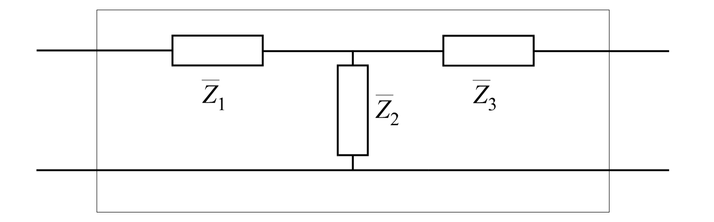


Figure 6.22

Conseil méthodologique

Il s'agit une fois de plus de la mise en cascade de deux quadripôles déjà étudiés.

12. Détermination d'une matrice de transfert par décomposition en cascade **

Déterminer la matrice de transfert du quadripôle représenté sur la figure 6.23.

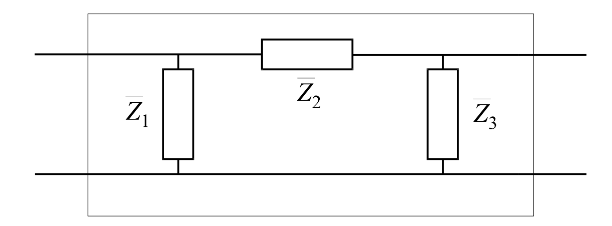


Figure 6.23

Conseil méthodologique

Il s'agit ici de la mise en cascade des deux mêmes quadripôles que dans l'exercice précédent, mais placés différemment.

13. Influence de la charge de sortie sur l'impédance d'entrée d'un quadripôle ***

On considère un quadripôle caractérisé par sa matrice impédance (Z). Ce quadripôle est relié à une charge $\overline{Z}_c$ comme indiqué sur la figure 6.24.

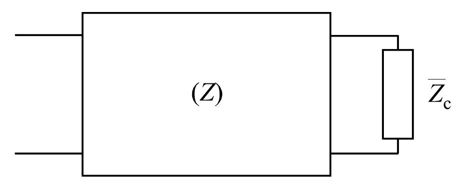


Figure 6.24

Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée $\overline{Z}_e$ de ce quadripôle en fonction de $\overline{Z}_c$ et des éléments de la matrice (Z).

Conseil méthodologique

Le quadripôle étant caractérisé par sa matrice impédance, on optera pour le schéma équivalent correspondant. Il s'agit bien de calculer le rapport entre la tension et le courant d'entrée en utilisant successivement la loi des mailles dans chaque partie du circuit.

14. Impédance de sortie d'un quadripôle quelconque alimenté par un générateur de tension réel ***

On considère un quadripôle caractérisé par sa matrice impédance (Z). Ce quadripôle est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $\overline{E}$ possédant une résistance interne r, comme indiqué sur la figure 6.25.

Déterminer l'expression de l'impédance de sortie $\overline{Z}_s$ de ce quadripôle en fonction de r et des éléments de la matrice (Z).

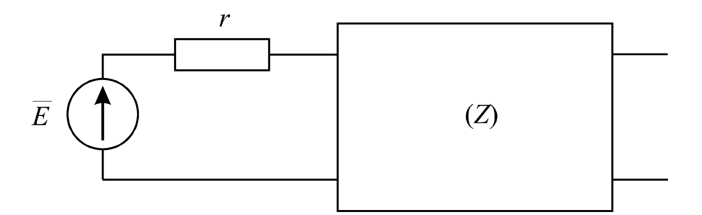


Figure 6.25

Conseil méthodologique

Tracer le schéma équivalent du quadripôle à partir de sa matrice impédance puis court-circuiter le générateur parfait composant le générateur réel.

15. Matrice et fonction de transfert d'un double quadripôle LC **

Déterminer la matrice de transfert (T) du quadripôle représenté sur la figure 6.26.

En supposant que ce quadripôle est alimenté par un générateur parfait de tension sinusoïdale tel que $\overline{V}_e = E_{eff}$ et qu'aucune charge n'est connectée à sa sortie, déterminer l'expression de $\dfrac{\overline{V}_s}{\overline{V}_e}$ en fonction de ω.

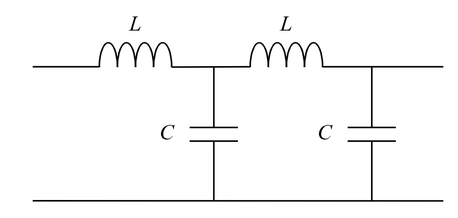


Figure 6.26

Conseil méthodologique

On cherchera à exprimer la matrice de transfert du quadripôle en remarquant qu'il n'est rien d'autre que l'association en cascade de deux quadripôles identiques.

16. Calcul de la matrice impédance d'un quadripôle à partir de sa matrice hybride ***

Déterminer la matrice impédance $\left(\overline{Z}\right)$ d'un quadripôle quelconque connaissant sa matrice hybride $\left(\overline{H}\right)$.

Conseil méthodologique

Il s'agit ici de partir des équations fournies par la matrice hybride et de les transformer pour faire apparaître celles de la matrice impédance. L'une des deux équations hybrides conduit immédiatement à l'une d'entre elles. Pour la seconde, quelques lignes de calcul sont nécessaires.

17. Calcul de la matrice hybride d'un quadripôle à partir de sa matrice admittance ***

Déterminer la matrice hybride $\left(\overline{H}\right)$ d'un quadripôle quelconque connaissant sa matrice admittance $\left(\overline{Y}\right)$.

Conseil méthodologique

Il faut ici partir de la matrice admittance et transformer les équations pour faire apparaître celles qui correspondent à la matrice hybride. En partant de l'expression du courant d'entrée, on peut immédiatement trouver l'une des deux relations recherchées.

18. Calcul de la matrice de transfert d'un quadripôle possédant deux références de potentiels di érentes ***

Déterminer la matrice de transfert $\left(\overline{T}\right)$ du quadripôle représenté sur la figure 6.27.

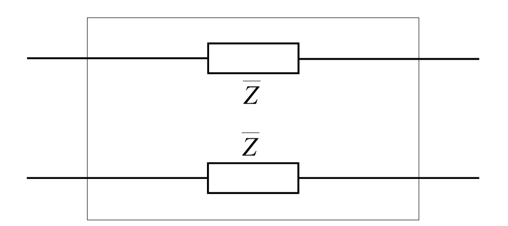


Figure 6.27

Conseil méthodologique

Attention, les tensions d'entrée et de sortie ne possèdent pas la même référence de potentiels. Cela complique quelque peu l'approche de cet exercice : nommer chaque potentiel aux bornes de sortie et chercher à éliminer ces grandeurs pour obtenir les expressions des grandeurs de sortie en fonction de celles d'entrée.

19. Calcul de la matrice admittance d'un quadripôle à partir de sa matrice de transfert ***

Déterminer la matrice admittance $\left(\overline{Y}\right)$ d'un quadripôle quelconque connaissant sa matrice de transfert $\left(\overline{T}\right)$.

Conseil méthodologique

Encore un exercice de transformation de matrice caractéristique de quadripôle. Le lecteur qui aura réussi les exercices 6.16 et 6.17 ne devrait pas rencontrer de difficultés.

20. Calcul de la matrice admittance d'un quadripôle en double té ponté ***

Déterminer la matrice admittance $\left(\overline{Y}\right)$ du quadripôle Q représenté sur la figure 6.28. On présentera le résultat final en posant : $x = RC\omega$.

Conseil méthodologique

On remarquera ici l'association en parallèle de deux quadripôles en té dont nous connaissons, grâce à l'exercice 6.11, la forme générale de la matrice admittance.

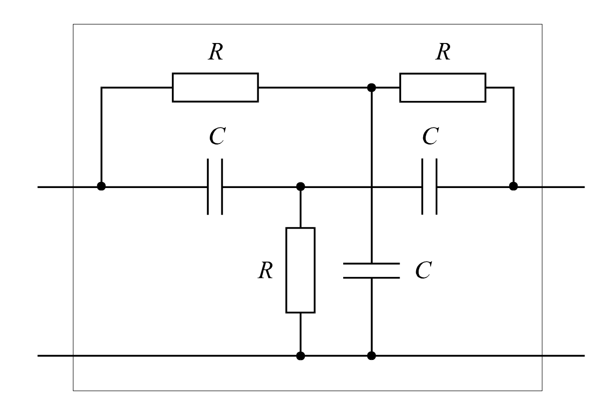


Figure 6.28

21. Quadripôles en parallèle ***

Déterminer la matrice admittance $(\overline{Y})$ du quadripôle représenté sur la figure 6.29. Quelle est l'expression de cette matrice admittance pour $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = \overline{Z}_4 = \overline{Z}$?
On remarquera que ce quadripôle est constitué de l'association en parallèle de deux quadripôles élémentaires Q′ et Q dont on déterminera les matrices admittances $(\overline{Y}')$ et $(\overline{Y}'')$.

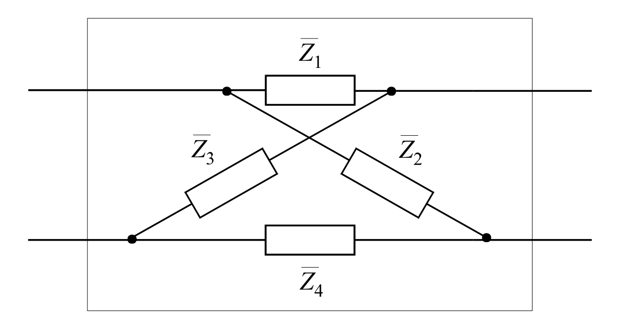


Figure 6.29

Conseil méthodologique

On identifiera facilement la mise en parallèle de deux quadripôles dont on cherchera les matrices admittances.

22. Adaptation d'impédances ***

Un quadripôle Q″ est associé en cascade à la sortie d'un quadripôle Q′. Soit $\overline{Z}_s = R_s + jX_s$ l'impédance de sortie du quadripôle Q′ et soit $\overline{V}_{s0}$ sa tension de sortie à vide. Soit $\overline{Z}_e = R_e + jX_e$ l'impédance d'entrée du quadripôle Q″ (figure 6.30). On posera $\overline{V}_{s0} = E_{eff}$.

a. Calculer l'expression $\overline{P}_0$ de la puissance complexe fournie par le générateur $\overline{V}_{s0}$ et celle de $\overline{P}_s$, puissance complexe consommée par l'impédance de sortie du quadripôle Q′.

b. En déduire la puissance active P_{0a} délivrée par $\overline{V}_{s0}$ ainsi que la puissance active P_{sa} consommée par la partie résistive de $\overline{Z}_s$, puis la puissance active P_{ea} dissipée dans l'impédance d'entrée $\overline{Z}_e$ du quadripôle Q″.

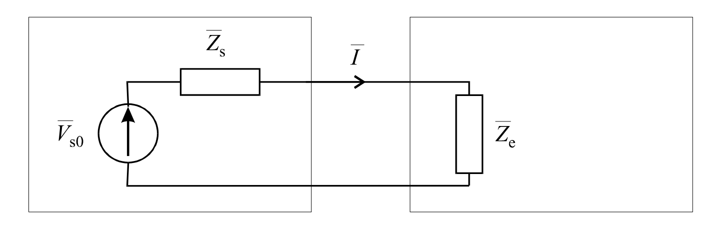


Figure 6.30

c. En supposant que $X_s = -X_e$, que R_s est donnée et que R_e est réglable, montrer qu'en choisissant $R_e = R_s$, la puissance P_{ea} est maximale. En déduire que, dans ces conditions, la puissance fournie par le quadripôle Q′ au quadripôle Q″ est maximale.

Conseil méthodologique

Il convient de partir de la définition de la puissance complexe pour déterminer les deux grandeurs recherchées à la première question. Bien faire attention aux règles de calcul des nombres complexes, notamment pour exprimer le conjugué de la représentation complexe du courant. Penser ensuite à utiliser le principe de conservation de la puissance.

23. Étude d'un quadripôle en charge ***

On considère le quadripôle représenté sur la figure 6.31.

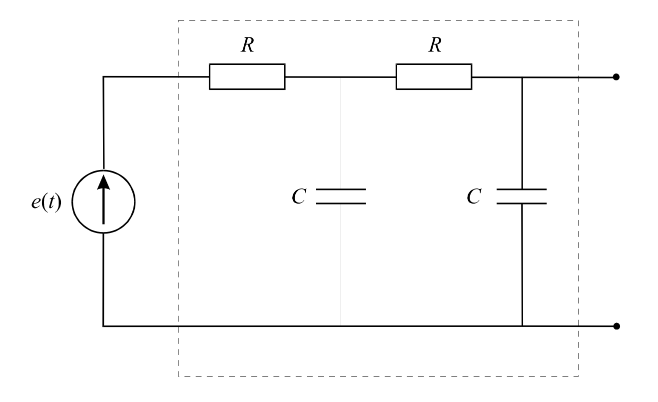


Figure 6.31

a. Déterminer la matrice de transfert de ce quadripôle.

b. On alimente ce quadripôle à l'aide d'un générateur parfait de tension sinusoïdale $e(t) = E_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$. Déterminer l'expression de la tension de sortie à vide (en modèle complexe) $\overline{V}_{s0}$.

c. Calculer l'impédance de sortie complexe $\overline{Z}_s$ du quadripôle.

d. On connecte une résistance de charge R_c en sortie du quadripôle. Déterminer la valeur efficace du courant qui la traverse.

Conseil méthodologique

La matrice de transfert du quadripôle s'obtient aisément en remarquant que le quadripôle proposé est formé de la mise en cascade de deux quadripôles identiques. La tension de sortie à vide est calculée en laissant les deux bornes de sortie isolées et l'impédance de sortie s'obtient en court-circuitant la source de tension placée à l'entrée. Quant au courant de charge, il sera calculé à partir du schéma équivalent obtenu à partir des éléments précédents.

Réponses

1. La figure 6.14 nous montre de manière évidente que les courants d'entrée et de sortie sont égaux. On a donc : $\overline{I}_s = \overline{I}_e$.

Par ailleurs, la loi d'Ohm aux bornes de $\overline{Z}$ nous donne immédiatement la relation :

$$\overline{V}_e - \overline{V}_s = \overline{Z}\overline{I}_e$$

D'où : $$\overline{V}_s = \overline{V}_e - \overline{Z}\overline{I}_e$$

Le système d'équations :

$$\begin{cases} \overline{V}_s = \overline{V}_e - \overline{Z}\overline{I}_e \\ \overline{I}_s = 0 \cdot \overline{V}_e + \overline{I}_e \end{cases}$$

nous conduit immédiatement à l'écriture matricielle qui met en évidence la matrice de transfert du quadripôle :

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_s \\ \overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{I}_e \end{pmatrix}$$

D'où : $$(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Une des techniques employées pour déterminer une matrice caractéristique consiste à « forcer » l'apparition des deux équations attendues en écrivant quelques lois simples de l'électricité.

2. Il s'agit cette fois de déterminer les coefficients $\overline{Y}_{ij}$ des équations :

$$\begin{cases} \overline{I}_e = \overline{Y}_{11}\overline{V}_e + \overline{Y}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{Y}_{21}\overline{V}_e + \overline{Y}_{22}\overline{V}_s \end{cases}$$

Court-circuitons les deux bornes d'entrée du quadripôle (figure 6.32).

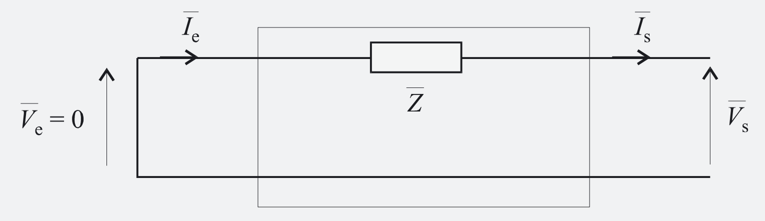


Figure 6.32

On a alors : $$\overline{V}_e = 0$$

D'où : $$\begin{cases} \overline{I}_e = \overline{Y}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{Y}_{22}\overline{V}_s \end{cases}$$

Le schéma de la figure 6.32 nous montre que :

$$\overline{I}_e = \overline{I}_s = -\frac{1}{\overline{Z}}\overline{V}_s$$

Soit :

$$\begin{cases} \overline{I}_e = -\dfrac{1}{\overline{Z}}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \dfrac{1}{\overline{Z}}\overline{V}_s \end{cases}$$

Par identification, on obtient :

$$\overline{Y}_{12} = -\frac{1}{\overline{Z}} \qquad \overline{Y}_{22} = \frac{1}{\overline{Z}}$$

À présent, court-circuitons les deux bornes de sortie du quadripôle (figure 6.33). On a, cette fois-ci : $\overline{V}_s = 0$.

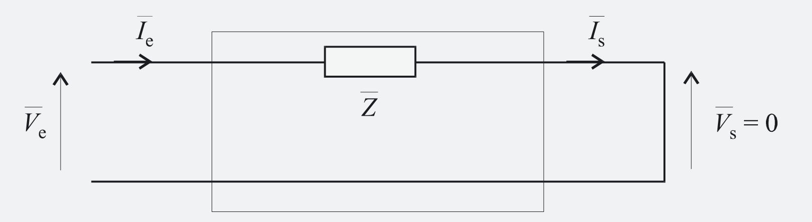


Figure 6.33

Le système d'équations définissant les paramètres de la matrice admittance devient :

$$\begin{cases} \overline{I}_e = \overline{Y}_{11}\overline{V}_e \\ -\overline{I}_s = \overline{Y}_{21}\overline{V}_e \end{cases}$$

La figure 6.33 nous permet d'écrire simplement :

$$\overline{I}_e = \overline{I}_s = \frac{1}{\overline{Z}}\overline{V}_e$$

D'où, par identification :

$$\overline{Y}_{11} = \frac{1}{\overline{Z}} \qquad \overline{Y}_{21} = -\frac{1}{\overline{Z}}$$

La matrice admittance du quadripôle est donc :

$$\left(\overline{Y}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\overline{Z}} & -\dfrac{1}{\overline{Z}} \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}} & \dfrac{1}{\overline{Z}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{Z}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour finir, remarquons que le déterminant de cette matrice $\left(\overline{Y}\right)$ est nul, donc qu'elle ne possède pas de matrice inverse. Ce quadripôle ne possède donc pas de matrice impédance, puisque celle-ci est définie, notamment, comme l'inverse de la matrice admittance.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Les équations définissant les paramètres de la matrice admittance d'un quadripôle devant être vérifiées quelles que soient les valeurs de $\overline{V}_e$ et de $\overline{V}_s$, on peut facilement les déterminer en utilisant des valeurs particulières de ces tensions. Ici, la technique utilisée consiste à court-circuiter l'entrée ou la sortie de manière à annuler l'une ou l'autre des tensions, et ainsi, de déterminer rapidement les paramètres cherchés. Cette technique est utilisable pour rechercher d'autres matrices caractéristiques d'un quadripôle. Par ailleurs, on se souviendra que tous les quadripôles ne possèdent pas l'ensemble des matrices caractéristiques définies dans les rappels de cours. Dans cet exercice, le quadripôle ne possède pas de matrice impédance ; parfois, nous pourrons rencontrer des quadripôles ne possédant ni matrice admittance ni matrices hybrides.

3. La figure 6.15 nous montre de manière évidente que les tensions $\overline{V}_e$ et $\overline{V}_s$ sont égales. De plus, le courant $\overline{I}$ circulant dans l'admittance $\overline{Y}$ (figure 6.34) se détermine facilement en fonction de l'une ou l'autre de ces tensions :

$$\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{V}_e = \overline{Y} \cdot \overline{V}_s$$

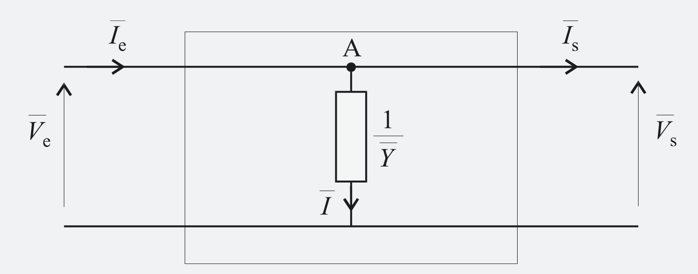


Figure 6.34

De plus, la loi des nœuds appliquée au point A nous donne :

$$\overline{I} = \overline{I}_e - \overline{I}_s$$

Comme nous cherchons à exprimer les coefficients d'une matrice de transfert, organisons ces équations de manière à les faire apparaître :

$$\begin{cases} \overline{V}_s = \overline{V}_e + 0 \cdot \overline{I}_e \\ \overline{I}_s = \overline{I}_e - \overline{I} = -\overline{YV}_e + \overline{I}_e \end{cases}$$

Soit :
$$\begin{pmatrix} \overline{V}_s \\ \overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{Y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{I}_e \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert du quadripôle est donc :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{Y} & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice illustre une fois de plus la technique qui consiste à « forcer » l'apparition des deux équations attendues en écrivant quelques lois simples de l'électricité.

4. Il s'agit cette fois de déterminer les coefficients $\overline{Z}_{ij}$ des équations :

$$\begin{cases} \overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e - \overline{Z}_{12}\overline{I}_s \\ \overline{V}_s = \overline{Z}_{21}\overline{I}_e - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s \end{cases}$$

Considérons le quadripôle en circuit ouvert, c'est-à-dire avec $\overline{I}_s = 0$ (figure 6.35).
Dans ces conditions, le système se trouve réduit aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e \\ \overline{V}_s = \overline{Z}_{21}\overline{I}_e \end{cases}$$

Puisque le courant de sortie est nul, le courant circulant dans l'admittance $\overline{Y}$ est égal à $\overline{I}_e$. La loi d'Ohm nous donne donc immédiatement :

$$\begin{cases} \overline{V}_e = \dfrac{\overline{I}_e}{\overline{Y}} \\ \overline{V}_s = \dfrac{\overline{I}_e}{\overline{Y}} \end{cases}$$

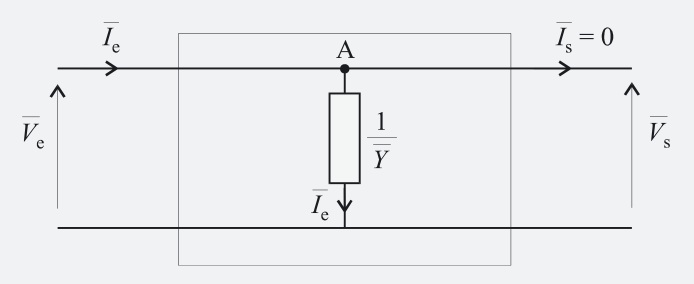


Figure 6.35

On en déduit donc, par identification :

$$\overline{Z}_{11} = \frac{1}{\overline{Y}} \qquad \overline{Z}_{21} = \frac{1}{\overline{Y}}$$

Afin de déterminer les deux autres coefficients, considérons maintenant que le courant d'entrée $\overline{I}_e$ est nul (figure 6.36).
Les deux équations de notre quadripôle deviennent :

$$\begin{cases} \overline{V}_e = -\overline{Z}_{12}\overline{I}_s \\ \overline{V}_s = -\overline{Z}_{22}\overline{I}_s \end{cases}$$

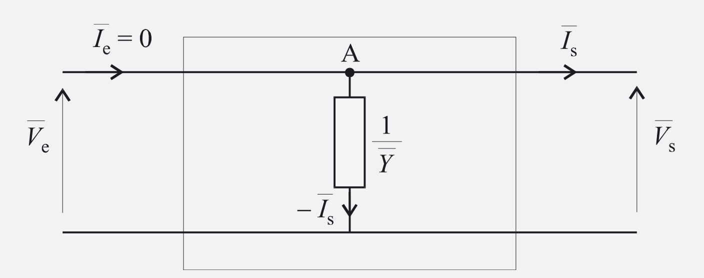


Figure 6.36

Le courant circulant dans l'admittance $\overline{Y}$, tel qu'il est orienté sur le schéma de la figure 6.36 est égal à $-\overline{I}_s$.
On obtient simplement à partir de la loi d'Ohm :

$$\overline{V}_e = \overline{V}_s = -\frac{\overline{I}_s}{\overline{Y}}$$

En procédant par identification, on obtient :

$$\overline{Z}_{12} = \frac{1}{\overline{Y}} \qquad \overline{Z}_{22} = \frac{1}{\overline{Y}}$$

En résumé, la matrice impédance de notre quadripôle a pour expression :

$$(\overline{Z}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\overline{Y}} & \frac{1}{\overline{Y}} \\ \frac{1}{\overline{Y}} & \frac{1}{\overline{Y}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{Y}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice impédance étant nul, celle-ci n'est pas inversible. Le quadripôle de la figure 6.15 ne possède donc pas de matrice admittance.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Comme pour l'exercice 6.2, la technique consistant à utiliser des valeurs particulières (ici pour les courants) s'avère fort utile pour déterminer les caractéristiques du quadripôle.

5. Transposons simplement le schéma électrique proposé dans son modèle complexe (figure 6.37).

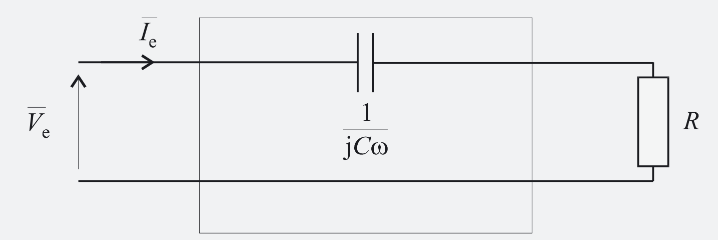


Figure 6.37

L'impédance d'entrée étant définie par $\overline{Z}_e = \frac{\overline{V}_e}{\overline{I}_e}$, on obtient :

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{V}_e}{\overline{I}_e} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

Soit encore :

$$\overline{Z}_e = R - \frac{j}{C\omega}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice très simple permet de bien se rendre compte que l'impédance d'entrée d'un quadripôle dépend toujours de la charge connectée à sa sortie.

6. Transposons le problème dans le modèle complexe (figure 6.38) et calculons l'impédance d'entrée définie par :

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{V}_e}{\overline{I}_e}$$

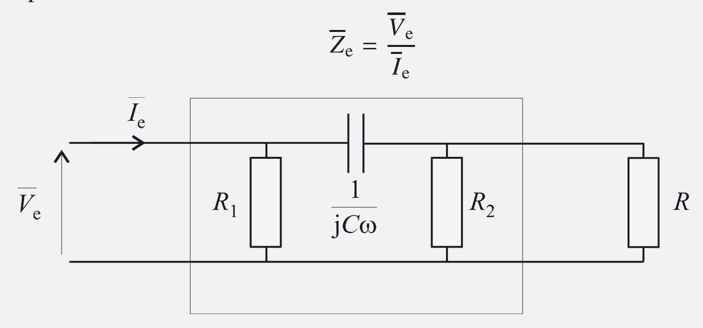


Figure 6.38

Il s'agit tout simplement de déterminer l'impédance équivalente à l'association du condensateur C et des trois résistances R, R_1 et R_2 (figure 6.39).

Les résistances R et R_2 étant placées en parallèle, elles sont équivalentes à une résistance R_0 telle que :

$$R_0 = \frac{RR_2}{R + R_2}$$

Cette résistance R_0 se trouve en série avec l'impédance du condensateur (figure 6.40).

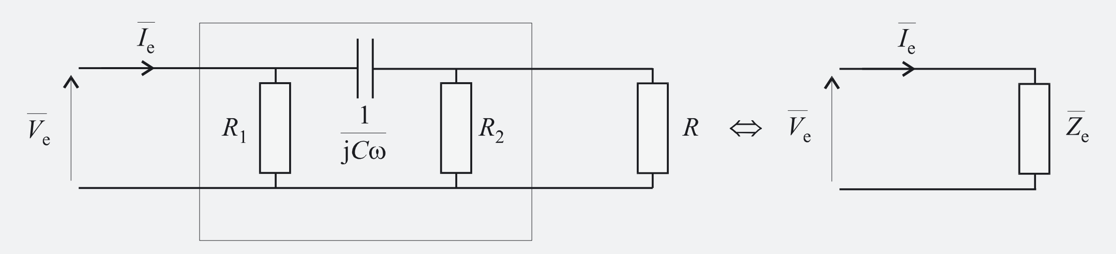


Figure 6.39

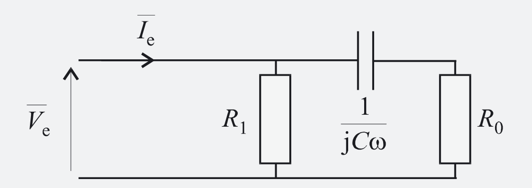


Figure 6.40

Finalement, le circuit se résume à l'association en parallèle de R_1 avec un dipôle d'impédance $R_0 + \dfrac{1}{jC\omega}$. On a donc :

$$\frac{1}{\overline{Z}_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0 + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

Soit :

$$\overline{Z}_e = \frac{R_1\left(R_0 + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}{R_1 + R_0 + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

Remplaçons R_0 par son expression.

On obtient :

$$\overline{Z}_e = \frac{R_1\left(\dfrac{RR_2}{R+R_2} + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}{R_1 + \dfrac{RR_2}{R+R_2} + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le calcul d'une impédance d'entrée se résume souvent à l'évaluation de l'impédance équivalente d'une association plus ou moins complexe. Procéder comme à l'accoutumée, de proche en proche, pour réduire progressivement le circuit.

7. Le modèle complexe de ce circuit étant représenté sur la figure 6.41, il s'agit de déterminer l'impédance équivalente du générateur de Thévenin équivalent au dipôle AB, autrement dit de déterminer l'impédance équivalente définie par le schéma de la figure 6.42.

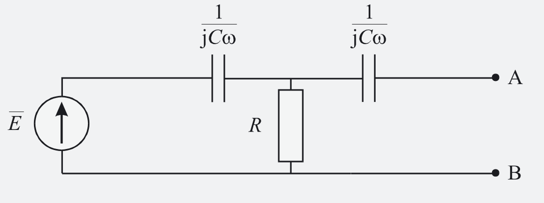


Figure 6.41

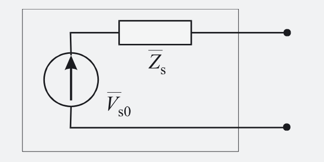


Figure 6.42

Puisqu'il s'agit de déterminer l'impédance équivalente du générateur de Thévenin, court-circuitons la source $\overline{E}$ (figure 6.43). $\overline{Z}_s$ se détermine en calculant l'impédance équivalente à l'association des deux condensateurs et de la résistance. On remarque d'abord la présence

d'une association en parallèle d'un condensateur et de la résistance, association qui possède une impédance équivalente $\overline{Z}_0$ (figure 6.44). Avec : $\overline{Z}_0 = \dfrac{\dfrac{R}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$

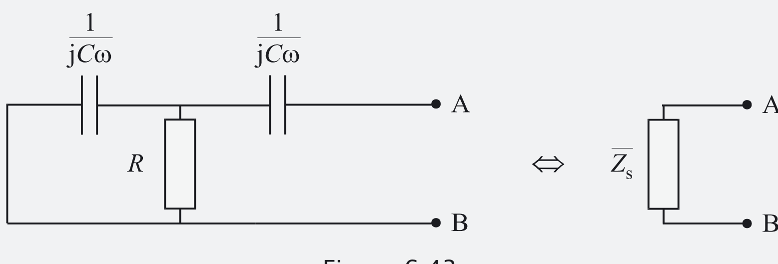


Figure 6.43

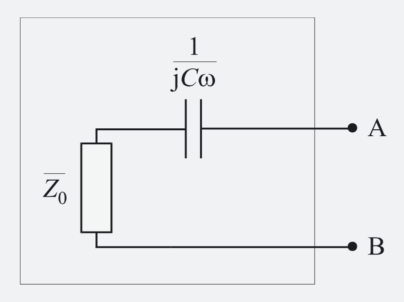


Figure 6.44

Il ne subsiste finalement que l'association en série de $\overline{Z}_0$ et de $\dfrac{1}{jC\omega}$. On a donc :$\overline{Z}_s = \overline{Z}_0 + \dfrac{1}{jC\omega}$

Soit : $$\overline{Z}_s = \frac{R}{1 + jRC\omega} + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + 2jRC\omega}{-RC^2\omega^2 + jC\omega}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le calcul de l'impédance de sortie d'un quadripôle ne pose pas plus de difficulté que la recherche de l'impédance équivalente d'un dipôle, puisque, finalement, ce calcul se résume bien à une telle recherche. On notera dans cet exercice que la valeur de l'impédance de sortie ne dépend pas du générateur. Cette propriété est due au fait que ce générateur est parfait, et ne possède donc pas de résistance interne.

8. Court-circuitons le générateur de tension et calculons l'impédance équivalente du dipôle AB représenté sur la figure 6.45, qui n'est rien d'autre que l'impédance $\overline{Z}_s$ recherchée.

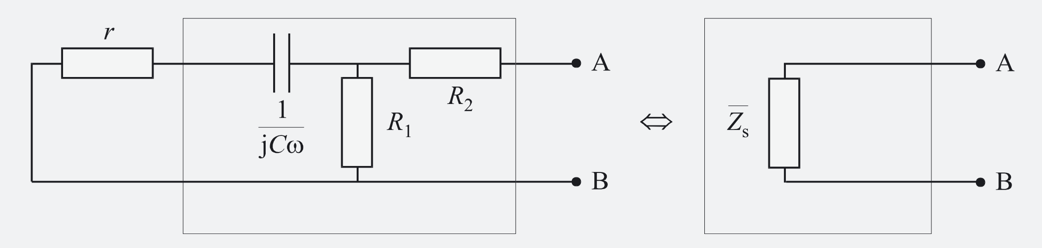


Figure 6.45

Regroupons déjà r et $\dfrac{1}{jC\omega}$ qui forment une impédance équivalente :

$$\overline{Z}_0 = r + \frac{1}{jC\omega}$$

Cette impédance $\overline{Z}_0$ se trouve en parallèle avec la résistance R_1 (figure 6.46). Cette nouvelle association est équivalente à une impédance $\overline{Z}_1$ telle que :

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{\overline{Z}_0} + \frac{1}{R_1} = \frac{jC\omega}{1 + jrC\omega} + \frac{1}{R_1} = \frac{1 + j(r + R_1)C\omega}{R_1(1 + jrC\omega)}$$

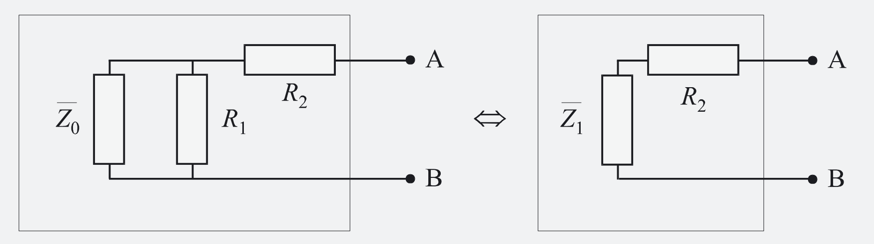


Figure 6.46

Soit :

$$\overline{Z}_1 = \frac{R_1(1 + jrC\omega)}{1 + j(r + R_1)C\omega}$$

Pour finir, l'association en série de $\overline{Z}_1$ et de R_2 nous donne l'impédance équivalente du dipôle AB, c'est-à-dire l'impédance de sortie $\overline{Z}_s$ que nous cherchons :

$$\overline{Z}_s = \overline{Z}_1 + R_2 = \frac{R_1(1 + jrC\omega)}{1 + j(r + R_1)C\omega} + R_2$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On remarque que l'impédance de sortie d'un quadripôle alimenté par un générateur de tension dépend bien de la résistance interne de ce générateur. Ceci complète le commentaire de l'exercice précédent et montre que d'une manière générale (hormis les générateurs parfaits) l'impédance de sortie dépend bien du générateur placé à l'entrée du quadripôle.

9. Notre circuit possède un schéma équivalent représenté sur la figure 6.47.

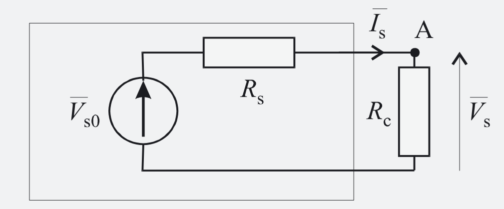


Figure 6.47

Appliquons le principe du diviseur de tension au point A :

$$\overline{V}_s = \frac{R_c}{R_c + R_s}\overline{V}_{s0}$$

D'où :

$$\left|\overline{V}_s\right| = \frac{R_c}{R_c + R_s}\left|\overline{V}_{s0}\right|$$

Soit :

$$V_{s_{eff}} = \frac{R_c}{R_c + R_s}V_{s0_{eff}}$$

En mesurant $V_{s_{eff}} = \dfrac{V_{s0_{eff}}}{2}$, on a :

$$\frac{V_{s0_{eff}}}{2} = \frac{R_c}{R_c + R_s} V_{s0_{eff}} \Rightarrow \frac{R_c}{R_c + R_s} = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$2R_c = R_c + R_s \Rightarrow R_c = R_s$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice décrit une méthode classique de mesure de la résistance de sortie d'un dispositif électrique quelconque : on effectue une mesure de la tension de sortie à vide, puis en charge et on règle cette charge de manière à mesurer une tension de sortie égale à la moitié de la tension à vide. Il est question ici de valeurs efficaces car les voltmètres utilisés en régime sinusoïdal ne mesurent que les valeurs efficaces des tensions.

10. Le quadripôle proposé correspond en réalité à la mise en cascade de deux quadripôles Q′et Q″ comme indiqué sur la figure 6.48.

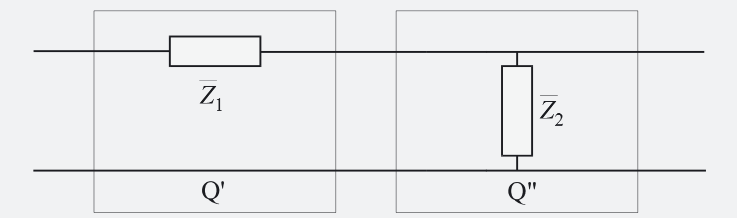


Figure 6.48

Soient (T') et (T'') les matrices de transfert respectives de ces deux quadripôles et soit (T) la matrice de transfert du quadripôle résultant représenté sur la figure 6.21. En utilisant les résultats démontrés dans les exercices 6.1 et 6.3, on obtient immédiatement :

$$(T') = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$(T'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_2} & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$(T) = (T'')(T') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_1 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_2} & \left(\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + 1\right) \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Pour déterminer une matrice de transfert, toujours examiner le quadripôle proposé pour, le cas échéant, le décomposer en quadripôles plus simples. Il suffit ensuite de multiplier les matrices de transfert élémentaires pour obtenir le résultat recherché.

11. Le quadripôle proposé correspond en réalité à la mise en cascade des deux quadripôles Q′ et Q″ représentés sur la figure 6.49. Soient (T') et (T'') les matrices de transfert respectives de ces deux quadripôles et soit (T) la matrice de transfert du quadripôle résultant.

Grâce au résultat de l'exercice 6.1, nous savons déjà que :

$$(T'') = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

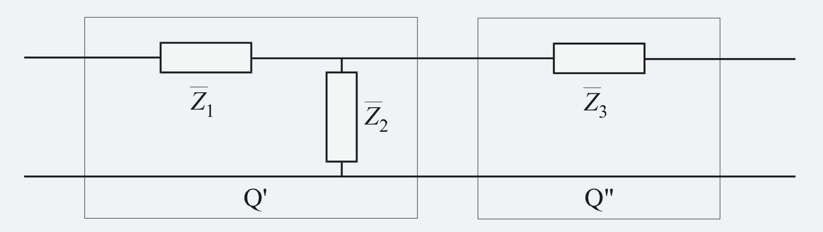


Figure 6.49

De plus, l'exercice précédent nous a permis de démontrer que :

$$(T') = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_1 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_2} & \left[\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + 1\right] \end{pmatrix}$$

On en déduit donc la matrice de transfert du quadripôle résultant de cette association en cascade :

$$(T) = (T'')(T') = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_1 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_2} & \left[\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + 1\right] \end{pmatrix}$$

Soit :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2} & \left[-\overline{Z}_1 - \overline{Z}_3\left(\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + 1\right)\right] \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_2} & \left[\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + 1\right] \end{pmatrix}$$

On peut alléger ces écritures en introduisant les admittances pour les éléments qui apparaissent aux dénominateurs de ces expressions. Ainsi, on obtient :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_3 & -\overline{Z}_1 - \overline{Z}_3\left(1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_1\right) \\ -\overline{Y}_2 & 1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Lorsqu'on recherche une matrice caractéristique d'un quadripôle, il est toujours utile de tenter de la décomposer en une association simple et d'utiliser un certain nombre de résultats élémentaires déjà connus. Le type de quadripôle étudié dans cet exercice est un quadripôle en té. Quelles que soient les valeurs des trois impédances qui constituent ce montage, nous pourrons utiliser ce résultat général afin d'en déterminer la matrice de transfert particulière.

12. Le quadripôle proposé correspond en réalité à la mise en cascade des deux quadripôles Q′ et Q″ représentés sur la figure 6.50.

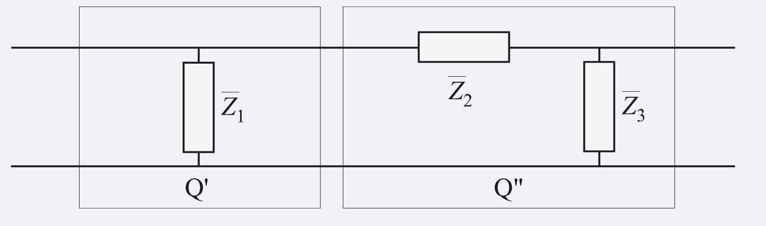


Figure 6.50

Soit (T') et (T'') les matrices de transfert respectives de ces deux quadripôles et soit (T) la matrice de transfert du quadripôle résultant.

Grâce au résultat de l'exercice 6.3, nous savons déjà que :

$$(T') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_1} & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, l'exercice 6.10 nous a permis de démontrer que :

$$(T'') = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_2 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_3} & \left[\dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3} + 1\right] \end{pmatrix}$$

Attention aux notations et notamment aux indices qui ici ne sont pas les mêmes que dans l'exercice 6.10.

On en déduit donc la matrice de transfert du quadripôle résultant de cette association en cascade :

$$(T) = (T'')(T') = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_2 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_3} & \left[\dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3} + 1\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_1} & 1 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1} & -\overline{Z}_2 \\ \left[-\dfrac{1}{\overline{Z}_3} - \dfrac{1}{\overline{Z}_1}\left(\dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3} + 1\right)\right] & \left(\dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3} + 1\right) \end{pmatrix}$$

Comme pour l'exercice précédent, nous pouvons alléger sensiblement ces écritures en introduisant certaines admittances, notamment pour les éléments apparaissant aux dénominateurs :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 + \overline{Y}_1\overline{Z}_2 & -\overline{Z}_2 \\ \left[-\overline{Y}_3 - \overline{Y}_1\left(1 + \overline{Y}_3\overline{Z}_2\right)\right] & 1 + \overline{Y}_3\overline{Z}_2 \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le montage étudié dans cet exercice est un quadripôle en pi. Comme le quadripôle en té de l'exercice précédent, il est fréquemment rencontré dans de nombreux problèmes.

13. Établissons le schéma équivalent de ce quadripôle : nous choisissons évidemment le modèle qui fait intervenir les éléments de la matrice impédance.

En posant : $\begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix} = \left(\overline{Z}\right) \begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix}$, on obtient le schéma équivalent de la figure 6.51 (voir rappels de cours, figure 6.8).

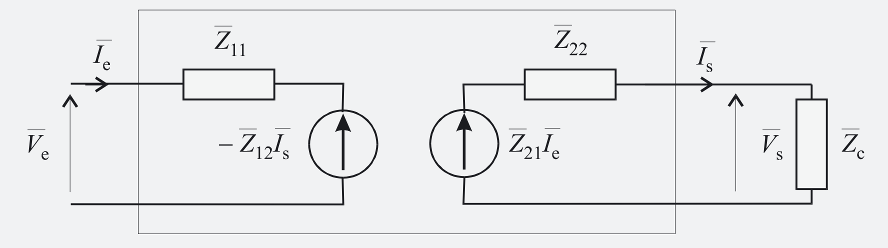


Figure 6.51

Dans la partie gauche de ce schéma équivalent, on tire :

$$\overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e - \overline{Z}_{12}\overline{I}_s$$

Afin de pouvoir déterminer l'impédance d'entrée, c'est-à-dire $\dfrac{\overline{V}_e}{\overline{I}_e}$, il nous faut exprimer $\overline{I}_s$ en fonction de $\overline{I}_e$.

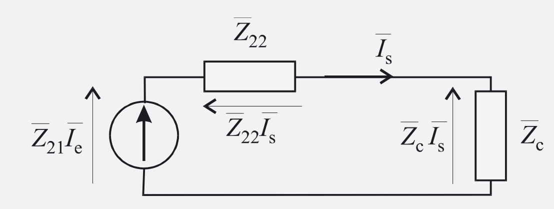


Figure 6.52

Dans la partie droite du schéma (figure 6.52), on tire :

$$\overline{Z}_{21}\overline{I}_e - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s - \overline{Z}_c\overline{I}_s = 0$$

D'où :

$$\overline{I}_s = \frac{\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{22} + \overline{Z}_c}\overline{I}_e$$

On en déduit donc :

$$\overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e - \frac{\overline{Z}_{12}\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{22} + \overline{Z}_c}\overline{I}_e$$

D'où l'expression de l'impédance d'entrée :

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{V}_e}{\overline{I}_e} = \overline{Z}_{11} - \frac{\overline{Z}_{12}\overline{Z}_{21}}{\overline{Z}_{22} + \overline{Z}_c}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le résultat de cet exercice est l'occasion d'insister une nouvelle fois sur le fait que l'impédance d'entrée d'un quadripôle dépend de l'impédance de charge.

14. Établissons le schéma équivalent qui modélise le quadripôle en fonction des paramètres de sa matrice impédance, puis court-circuitons le générateur $\overline{E}$ puisqu'il s'agit de déterminer l'impédance du générateur de Thévenin équivalent au dipôle AB (figure 6.53).

Comme nous l'avons déjà vu au cours des exercices 6.7 et 6.8, nous nous attendons effectivement à ce que l'impédance de sortie d'un quadripôle dépende de la résistance interne du générateur qui l'alimente.

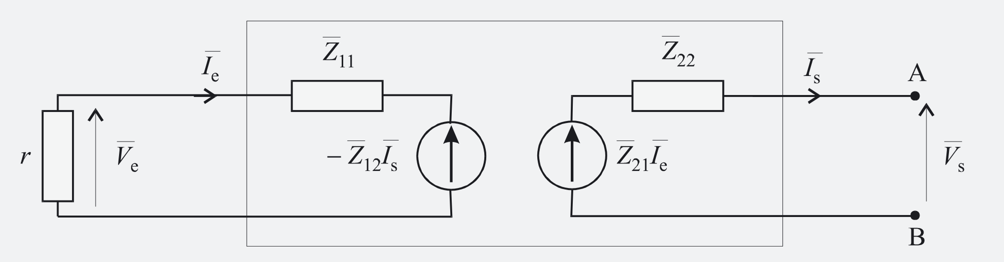


Figure 6.53

Il s'agit de déterminer $\overline{Z}_s = -\dfrac{\overline{V}_s}{\overline{I}_s}$, égalité qui se trouve exacte parce que le générateur $\overline{E}$ est court-circuité.

Le signe ń moins ż apparaissant dans cette définition de l'impédance de sortie est dû à l'orientation du courant de sortie du quadripôle. Ne pas oublier que l'on ne peut utiliser cette définition de l'impédance de sortie que lorsque le générateur d'entrée est court-circuité.
Dans la maille de gauche du circuit de la figure 6.53, on peut écrire l'équation :

$$-r\overline{I}_e - \overline{Z}_{11}\overline{I}_e + \overline{Z}_{12}\overline{I}_s = 0$$

D'où : $$\overline{I}_e = \frac{\overline{Z}_{12}}{r + \overline{Z}_{11}}\overline{I}_s$$

Dans la partie droite du circuit, on a :

$$\overline{V}_s = \overline{Z}_{21}\overline{I}_e - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s$$

On en déduit donc :

$$\overline{V}_s = \frac{\overline{Z}_{21}\overline{Z}_{12}}{r + \overline{Z}_{11}}\overline{I}_s - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s$$

D'où : $$\overline{Z}_s = -\frac{\overline{V}_s}{\overline{I}_s} = \overline{Z}_{22} - \frac{\overline{Z}_{21}\overline{Z}_{12}}{r + \overline{Z}_{11}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cette expression constitue la forme générale de l'impédance de sortie d'un quadripôle modélisé par sa matrice impédance et alimenté par un générateur de tension de résistance interne *r*.

15. Établissons le modèle complexe du quadripôle, et remarquons qu'il est formé de la mise en cascade de deux quadripôles Q′ identiques (figure 6.54).

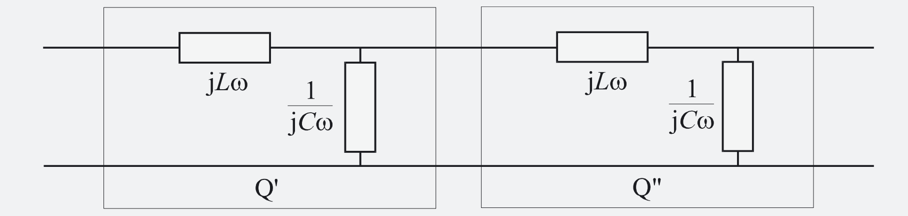


Figure 6.54

Chacun de ces deux quadripôles Q′ possède une forme que nous avons déjà étudiée dans l'exercice 6.10. Nous avons ainsi montré que la matrice de transfert (T') d'un de ces quadripôles est :

$$(T') = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{Z}_1 \\ -\frac{1}{\overline{Z}_2} & \left(\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + 1\right) \end{pmatrix}$$

Avec, pour notre cas particulier : $$\overline{Z}_1 = jL\omega \text{ et } \overline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$$

D'où : $$(T') = \begin{pmatrix} 1 & -jL\omega \\ -jC\omega & 1 - LC\omega^2 \end{pmatrix}$$

Comme les deux quadripôles sont associés en cascade, la matrice (T) du quadripôle résultant est égale au produit de leurs matrices de transfert. Soit : $(T) = (T')^2$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & -jL\omega \\ -jC\omega & 1 - LC\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -jL\omega \\ -jC\omega & 1 - LC\omega^2 \end{pmatrix}$$

D'où : $$(T) = \begin{pmatrix} 1 - LC\omega^2 & -2jL\omega + jL^2C\omega^3 \\ -2jC\omega + jLC^2\omega^3 & -LC\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2 \end{pmatrix}$$

Comme : $$\begin{pmatrix}\overline{V}_s \\ \overline{I}_s\end{pmatrix} = \left(\overline{T}\right)\begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ \overline{I}_e\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{V}_s = \overline{T}_{11}\overline{V}_e + \overline{T}_{12}\overline{I}_e \\ \overline{I}_s = \overline{T}_{21}\overline{V}_e + \overline{T}_{22}\overline{I}_e\end{cases}$$

et qu'on suppose que $\overline{I}_s = 0$, on a :

$$\overline{T}_{21}\overline{V}_e + \overline{T}_{22}\overline{I}_e = 0 \Rightarrow \overline{I}_e = -\frac{\overline{T}_{21}}{\overline{T}_{22}}\overline{V}_e$$

D'où : $$\overline{V}_s = \overline{T}_{11}\overline{V}_e - \frac{\overline{T}_{12}\overline{T}_{21}}{\overline{T}_{22}}\overline{V}_e$$

Soit : $$\frac{\overline{V}_s}{\overline{V}_e} = \overline{T}_{11} - \frac{\overline{T}_{12}\overline{T}_{21}}{\overline{T}_{22}}$$

Remplaçons les coefficients $\overline{T}_{ij}$ par leurs expressions :

$$\frac{\overline{V}_s}{\overline{V}_e} = 1 - LC\omega^2 - \frac{(-2jL\omega + jL^2C\omega^3)(-2jC\omega + jLC^2\omega^3)}{-LC\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2}$$

Après réduction au même dénominateur puis simplification, on obtient :

$$\frac{\overline{V}_s}{\overline{V}_e} = \frac{1}{1 - 3LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La matrice de transfert permet d'obtenir l'expression de la fonction de transfert du quadripôle, autrement dit l'expression du rapport entre tension de sortie et tension d'entrée. Attention, ne pas croire que cette expression se réduit au seul paramètre $\overline{T}_{11}$.

16. La matrice hybride d'un quadripôle permet d'exprimer les relations suivantes :

$$\begin{cases}\overline{V}_e = \overline{H}_{11}\overline{I}_e + \overline{H}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{H}_{21}\overline{I}_e + \overline{H}_{22}\overline{V}_s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{V}_e \\ -\overline{I}_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{H}_{11} & \overline{H}_{12} \\ \overline{H}_{21} & \overline{H}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix} = \left(\overline{H}\right)\begin{pmatrix}\overline{I}_e \\ \overline{V}_s\end{pmatrix}$$

Il nous faut transformer ces équations de manière à obtenir $\overline{V}_s$ et $\overline{V}_e$ en fonction de $\overline{I}_s$ et $\overline{I}_e$.

$$-\overline{I}_s = \overline{H}_{21}\overline{I}_e + \overline{H}_{22}\overline{V}_s \Rightarrow \overline{V}_s = \frac{-\overline{I}_s - \overline{H}_{21}\overline{I}_e}{\overline{H}_{22}}$$

ce qui nous donne immédiatement :

$$\overline{V}_s = -\frac{\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_e - \frac{1}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_s$$

que nous pouvons remplacer dans la première équation :

$$\overline{V}_e = \overline{H}_{11}\overline{I}_e + \overline{H}_{12}\overline{V}_s = \overline{H}_{11}\overline{I}_e + \overline{H}_{12}\left(-\frac{\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_e - \frac{1}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_s\right)$$

D'où : $$\overline{V}_e = \left(\overline{H}_{11} - \frac{\overline{H}_{12}\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}}\right)\overline{I}_e - \frac{\overline{H}_{12}}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_s$$

En résumé : $$\begin{cases} \overline{V}_e = \left(\overline{H}_{11} - \dfrac{\overline{H}_{12}\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}}\right)\overline{I}_e - \dfrac{\overline{H}_{12}}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_s \\ \overline{V}_s = -\dfrac{\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_e - \dfrac{1}{\overline{H}_{22}}\overline{I}_s \end{cases}$$

Ce système correspond bien à la définition de la matrice impédance :

$$\begin{cases} \overline{V}_e = \overline{Z}_{11}\overline{I}_e - \overline{Z}_{12}\overline{I}_s \\ \overline{V}_s = \overline{Z}_{21}\overline{I}_e - \overline{Z}_{22}\overline{I}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix} = \left(\overline{Z}\right) \begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix}$$

Procédons simplement par identification :

$$\overline{Z}_{11} = \overline{H}_{11} - \frac{\overline{H}_{12}\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}} \quad \overline{Z}_{12} = \frac{\overline{H}_{12}}{\overline{H}_{22}}$$
$$\overline{Z}_{21} = -\frac{\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}} \quad \overline{Z}_{22} = \frac{1}{\overline{H}_{22}}$$

Soit encore sous forme matricielle :

$$\left(\overline{Z}\right) = \begin{pmatrix} \left[\overline{H}_{11} - \dfrac{\overline{H}_{12}\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}}\right] & \dfrac{\overline{H}_{12}}{\overline{H}_{22}} \\ -\dfrac{\overline{H}_{21}}{\overline{H}_{22}} & \dfrac{1}{\overline{H}_{22}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{H}_{22}} \begin{pmatrix} \det\left(\overline{H}\right) & \overline{H}_{12} \\ -\overline{H}_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Il peut être utile de savoir passer d'une matrice caractéristique à l'autre. Il n'existe pas de technique générique pour y parvenir. Seule la transformation progressive des équations de départ permet d'obtenir le jeu d'équations recherchées.

17. La matrice admittance d'un quadripôle est définie par :

$$\begin{cases} \overline{I}_e = \overline{Y}_{11}\overline{V}_e + \overline{Y}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{Y}_{21}\overline{V}_e + \overline{Y}_{22}\overline{V}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix} = \left(\overline{Y}\right) \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix}$$

Comme nous recherchons la matrice hybride $\left(\overline{H}\right)$ il nous faut transformer ces équations de manière à obtenir $\overline{V}_e$ et $-\overline{I}_s$ en fonction de $\overline{I}_e$ et $\overline{V}_s$.

On a : $$\overline{I}_e = \overline{Y}_{11}\overline{V}_e + \overline{Y}_{12}\overline{V}_s \Rightarrow \overline{V}_e = \frac{\overline{I}_e - \overline{Y}_{12}\overline{V}_s}{\overline{Y}_{11}}$$

D'où l'une des deux relations recherchées :

$$\overline{V}_e = \frac{1}{\overline{Y}_{11}}\overline{I}_e - \frac{\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}}\overline{V}_s$$

En remplaçant cette expression dans l'autre équation, on obtient l'expression du courant de sortie :

$$-\overline{I}_s = \overline{Y}_{21}\frac{\overline{I}_e - \overline{Y}_{12}\overline{V}_s}{\overline{Y}_{11}} + \overline{Y}_{22}\overline{V}_s$$

Soit : $$-\overline{I}_s = \frac{\overline{Y}_{21}}{\overline{Y}_{11}}\overline{I}_e + \left(\overline{Y}_{22} - \frac{\overline{Y}_{21}\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}}\right)\overline{V}_s$$

En résumé, on a :

$$\begin{cases} \overline{V}_e = \dfrac{1}{\overline{Y}_{11}}\overline{I}_e - \dfrac{\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \dfrac{\overline{Y}_{21}}{\overline{Y}_{11}}\overline{I}_e + \left(\overline{Y}_{22} - \dfrac{\overline{Y}_{21}\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}}\right)\overline{V}_s \end{cases}$$

Ce système correspond bien à la définition de la matrice $\left(\overline{H}\right)$:

$$\begin{cases} \overline{V}_e = \overline{H}_{11}\overline{I}_e + \overline{H}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{H}_{21}\overline{I}_e + \overline{H}_{22}\overline{V}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{H}_{11} & \overline{H}_{12} \\ \overline{H}_{21} & \overline{H}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix} = \left(\overline{H}\right)\begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix}$$

Procédons simplement par identification :

$$\overline{H}_{11} = \frac{1}{\overline{Y}_{11}} \quad \overline{H}_{12} = -\frac{\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}}$$

$$\overline{H}_{21} = \frac{\overline{Y}_{21}}{\overline{Y}_{11}} \quad \overline{H}_{22} = \overline{Y}_{22} - \frac{\overline{Y}_{21}\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}}$$

Soit encore sous forme matricielle :

$$\left(\overline{H}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\overline{Y}_{11}} & -\dfrac{\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}} \\ \dfrac{\overline{Y}_{21}}{\overline{Y}_{11}} & \left[\overline{Y}_{22} - \dfrac{\overline{Y}_{21}\overline{Y}_{12}}{\overline{Y}_{11}}\right] \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{Y}_{11}}\begin{pmatrix} 1 & -\overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \det\left(\overline{Y}\right) \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Même commentaire que précédemment avec cette transformation d'une matrice admittance vers la matrice hybride.

18. Plaçons les différentes tensions et les courants dans le circuit transposé à son modèle complexe. Choisissons la borne de référence de $\overline{V}_e$ comme étant la masse commune à l'ensemble du circuit. Par ailleurs, afin de visualiser comment les courants circulent dans le circuit, imaginons que notre quadripôle est alimenté par un générateur $\overline{E}$ et qu'il est relié à une charge $\overline{Z}_c$ (figure 6.55).

Appelons $\overline{V}_A$ et $\overline{V}_B$ les potentiels des points A et B.

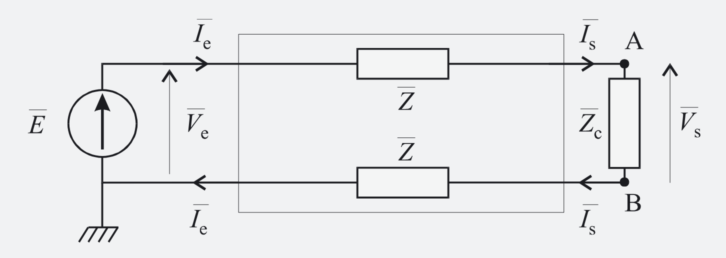


Figure 6.55

Contrairement aux quadripôles classiques que nous avons étudiés jusqu'à présent, $\overline{V}_A \neq \overline{V}_s$. En fait, on a :

$$\overline{V}_s = \overline{V}_A - \overline{V}_B$$

Nous remarquons également qu'un seul et même courant circule dans l'ensemble du circuit : $\overline{I}_e = \overline{I}_s$. Exprimons la loi d'Ohm aux bornes de chacune des deux impédances $\overline{Z}$.

On a : $$\overline{V}_e - \overline{V}_A = \overline{Z}\overline{I}_e = \overline{Z}\overline{I}_s \Rightarrow \overline{V}_A = \overline{V}_e - \overline{Z}\overline{I}_e$$

$$\overline{V}_B = \overline{Z}\overline{I}_e$$

On en déduit que :

$$\overline{V}_s = \overline{V}_A - \overline{V}_B = \overline{V}_e - \overline{Z}\overline{I}_e - \overline{Z}\overline{I}_e = \overline{V}_e - 2\overline{Z}\overline{I}_e$$

En résumé : $$\begin{cases} \overline{V}_s = \overline{V}_e - 2\overline{Z}\overline{I}_e \\ \overline{I}_s = \overline{I}_e \end{cases}$$

que nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_s \\ \overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\overline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{I}_e \end{pmatrix}$$

D'où : $$\left(\overline{T}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2\overline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La principale difficulté de cet exercice provient du fait que les tensions d'entrée et de sortie ne possèdent pas la même référence. En effet, nous sommes plutôt habitués à des quadripôles dont les deux bornes inférieures sont reliées. Cela ne doit pas nous faire oublier que des cas plus complexes peuvent survenir.

19. La matrice de transfert d'un quadripôle permet d'exprimer les relations suivantes :

$$\begin{cases} \overline{V}_s = \overline{T}_{11}\overline{V}_e + \overline{T}_{12}\overline{I}_e \\ \overline{I}_s = \overline{T}_{21}\overline{V}_e + \overline{T}_{22}\overline{I}_e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{V}_s \\ \overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{T}_{11} & \overline{T}_{12} \\ \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{I}_e \end{pmatrix} = \left(\overline{T}\right) \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{I}_e \end{pmatrix}$$

Il nous faut transformer ces équations de manière à obtenir $\overline{I}_s$ et $\overline{I}_e$ en fonction de $\overline{V}_s$ et $\overline{V}_e$:

$$\overline{V}_s = \overline{T}_{11}\overline{V}_e + \overline{T}_{12}\overline{I}_e \Rightarrow \overline{I}_e = \frac{\overline{V}_s - \overline{T}_{11}\overline{V}_e}{\overline{T}_{12}}$$

ce qui nous donne immédiatement :

$$\overline{I}_e = -\frac{\overline{T}_{11}}{\overline{T}_{12}}\overline{V}_e + \frac{1}{\overline{T}_{12}}\overline{V}_s$$

que nous pouvons remplacer dans la seconde équation.
On obtient alors :

$$\overline{I}_s = \overline{T}_{21}\overline{V}_e + \overline{T}_{22}\overline{I}_e = \overline{T}_{21}\overline{V}_e + \overline{T}_{22}\left(\frac{\overline{V}_s - \overline{T}_{11}\overline{V}_e}{\overline{T}_{12}}\right)$$

D'où : $$\overline{I}_s = \left(\overline{T}_{21} - \frac{\overline{T}_{11}\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\right)\overline{V}_e + \frac{\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\overline{V}_s$$

En résumé : $$\begin{cases} \overline{I}_e = -\dfrac{\overline{T}_{11}}{\overline{T}_{12}}\overline{V}_e + \dfrac{1}{\overline{T}_{12}}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = -\left(\overline{T}_{21} - \dfrac{\overline{T}_{11}\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\right)\overline{V}_e - \dfrac{\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\overline{V}_s \end{cases}$$

Ce système correspond bien à la définition de la matrice admittance :

$$\begin{cases} \overline{I}_e = \overline{Y}_{11}\overline{V}_e + \overline{Y}_{12}\overline{V}_s \\ -\overline{I}_s = \overline{Y}_{21}\overline{V}_e + \overline{Y}_{22}\overline{V}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix} = \left(\overline{Y}\right) \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix}$$

Procédons simplement par identification :

$$\overline{Y}_{11} = -\frac{\overline{T}_{11}}{\overline{T}_{12}} \qquad \overline{Y}_{12} = \frac{1}{\overline{T}_{12}}$$

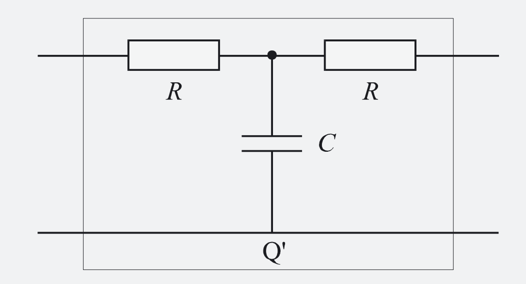
$$\overline{Y}_{21} = -\left(\overline{T}_{21} - \frac{\overline{T}_{11}\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\right) \qquad \overline{Y}_{22} = -\frac{\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}$$

Soit encore sous forme matricielle :

$$\left(\overline{Y}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\overline{T}_{11}}{\overline{T}_{12}} & \dfrac{1}{\overline{T}_{12}} \\ \left[-\overline{T}_{21} + \dfrac{\overline{T}_{11}\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\right] & -\dfrac{\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{T}_{12}} \begin{pmatrix} -\overline{T}_{11} & 1 \\ \det\left(\overline{T}\right) & -\overline{T}_{22} \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le passage d'une matrice caractéristique d'un quadripôle à une autre peut s'avérer fort utile. En effet certaines matrices sont plus faciles à déterminer que d'autres mais sont difficilement exploitables directement. D'où l'importance de ces relations qui permettent de passer d'une matrice à une autre.

20. Remarquons dans un premier temps que le quadripôle Q est formé de l'association en parallèle de deux quadripôles Q′ et Q représentés sur la figure 6.56.



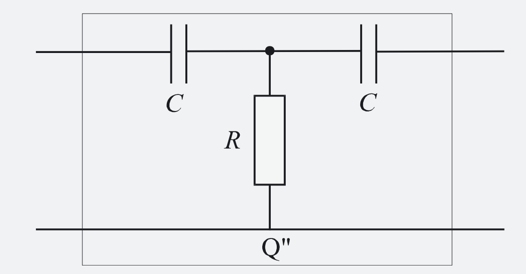


Figure 6.56

Sachant que la matrice admittance $\left(\overline{Y}\right)$ d'un quadripôle constitué de l'association parallèle de deux quadripôles de matrices admittances respectives $\left(\overline{Y}'\right)$ et $\left(\overline{Y}''\right)$ est égale à la somme $\left(\overline{Y}'\right) + \left(\overline{Y}''\right)$, nous devons tout d'abord calculer les deux matrices admittances $\left(\overline{Y}'\right)$ et $\left(\overline{Y}''\right)$ des deux quadripôles Q′ et Q.

- **Calcul de la matrice $\left(\overline{Y}'\right)$**

Le quadripôle Q′ est un quadripôle en T. Nous avons vu, dans l'exercice 6.11 que la matrice de transfert d'un tel quadripôle avait pour forme générale :

$$(T') = \begin{pmatrix} 1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_3 & -\overline{Z}_1 - \overline{Z}_3\left(1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_1\right) \\ -\overline{Y}_2 & 1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas particulier du quadripôle Q', on a :

$$\overline{Z}_1 = R \qquad \overline{Y}_2 = jC\omega \qquad \overline{Z}_3 = R$$

La matrice de transfert du quadripôle Q' est donc :

$$(T') = \begin{pmatrix} 1 + jRC\omega & -R - R(1 + jRC\omega) \\ -jC\omega & 1 + jRC\omega \end{pmatrix}$$

D'où : $$(T') = \begin{pmatrix} \overline{T}_{11} & \overline{T}_{12} \\ \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + jRC\omega & -jR^2C\omega \\ -jC\omega & 1 + jRC\omega \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors appliquer le résultat de l'exercice 6.19 qui permet d'exprimer la matrice admittance d'un quadripôle en fonction de sa matrice de transfert :

$$\left(\overline{Y}'\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\overline{T}_{11}}{\overline{T}_{12}} & \dfrac{1}{\overline{T}_{12}} \\ \left[-\overline{T}_{21} + \dfrac{\overline{T}_{11}\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\right] & -\dfrac{\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + jRC\omega}{jR^2C\omega} & -\dfrac{1}{jR^2C\omega} \\ \dfrac{-1 - 2jRC\omega}{jR^2C\omega} & \dfrac{1 + jRC\omega}{jR^2C\omega} \end{pmatrix}$$

- **Calcul de la matrice** $\left(\overline{Y}''\right)$

Le calcul de la matrice admittance du quadripôle Q″ s'effectue de manière similaire. Nous reconnaissons à nouveau un quadripôle en T, dont la matrice de transfert a encore pour expression :

$$(T'') = \begin{pmatrix} 1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_3 & -\overline{Z}_1 - \overline{Z}_3\left(1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_1\right) \\ -\overline{Y}_2 & 1 + \overline{Y}_2\overline{Z}_1 \end{pmatrix}$$

avec, cette fois-ci :

$$\overline{Z}_1 = \frac{1}{jC\omega} \quad \overline{Y}_2 = \frac{1}{R} \quad \overline{Z}_3 = \frac{1}{jC\omega}$$

Soit : $$(T'') = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{jRC\omega} & \dfrac{1}{RC^2\omega^2} \\ -\dfrac{1}{R} & 1 + \dfrac{1}{jRC\omega} \end{pmatrix}$$

ou encore : $$(T'') = \begin{pmatrix} \overline{T}_{11} & \overline{T}_{12} \\ \overline{T}_{21} & \overline{T}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + jRC\omega}{jRC\omega} & \dfrac{1}{RC^2\omega^2} \\ -\dfrac{1}{R} & \dfrac{1 + jRC\omega}{jRC\omega} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons à nouveau appliquer le résultat de l'exercice 6.19 qui permet d'exprimer la matrice admittance d'un quadripôle en fonction de sa matrice de transfert :

$$\left(\overline{Y}''\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\overline{T}_{11}}{\overline{T}_{12}} & \dfrac{1}{\overline{T}_{12}} \\ \left[-\overline{T}_{21} + \dfrac{\overline{T}_{11}\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}}\right] & -\dfrac{\overline{T}_{22}}{\overline{T}_{12}} \end{pmatrix}$$

Après simplifications :

$$\left(\overline{Y}''\right) = \begin{pmatrix} (1 + jRC\omega)jC\omega & RC^2\omega^2 \\ -2jC\omega + RC^2\omega^2 & (1 + jRC\omega)jC\omega \end{pmatrix}$$

- **Calcul de la matrice résultante**

La matrice admittance du quadripôle formé de l'association parallèle de Q' et de Q" a pour expression :

$$(Y) = (Y') + (Y'')$$

Afin de ne pas surcharger les écritures, calculons séparément les quatre coefficients :

$$\overline{Y}_{11} = \frac{1 + jRC\omega}{jR^2C\omega} + (1 + jRC\omega)jC\omega$$

Soit :
$$\overline{Y}_{11} = \frac{1 + jRC\omega + jR^2C\omega(1 + jRC\omega)jC\omega}{jR^2C\omega}$$

D'où :
$$\overline{Y}_{11} = \frac{1 + jRC\omega - R^2C^2\omega^2 - jR^3C^3\omega^3}{jR^2C\omega}$$

$$\overline{Y}_{12} = -\frac{1}{jR^2C\omega} + RC^2\omega^2 = \frac{-1 + jR^3C^3\omega^3}{jR^2C\omega}$$

$$\overline{Y}_{21} = \frac{-1 - 2jRC\omega}{jR^2C\omega} - 2jC\omega + RC^2\omega^2$$

D'où :
$$\overline{Y}_{21} = \frac{-1 - 2jRC\omega + 2R^2C^2\omega^2 + jR^3C^3\omega^3}{jR^2C\omega}$$

Par ailleurs :

$$\overline{Y}_{22} = \overline{Y}_{11} = \frac{1 + jRC\omega - R^2C^2\omega^2 - jR^3C^3\omega^3}{jR^2C\omega}$$

Posons à présent : $x = RC\omega$

$$(Y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + jx - x^2 - jx^3}{jRx} & \dfrac{-1 + jx^3}{jRx} \\ \dfrac{-1 - 2jx + 2x^2 + jx^3}{jRx} & \dfrac{1 + jx - x^2 - jx^3}{jRx} \end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le montage étudié dans cet exercice est un quadripôle en double té ponté, très utilisé dans des circuits de filtrage en électronique. Compte tenu que la quantité $x = RC\omega$ représente un nombre sans dimension, on remarque que chaque coefficient de la matrice admittance est bien homogène à l'inverse d'une impédance, ce qui, en soi, n'est pas une preuve de la justesse du résultat final, mais contribue en quelque sorte à nous rassurer.

21. Les deux quadripôles représentés sur la figure 6.57 étant associés en parallèle, la somme de leurs matrices admittances donnera la matrice admittance du quadripôle résultant.

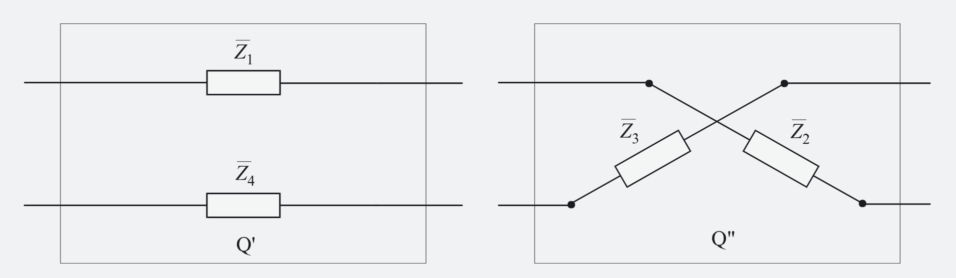


Figure 6.57

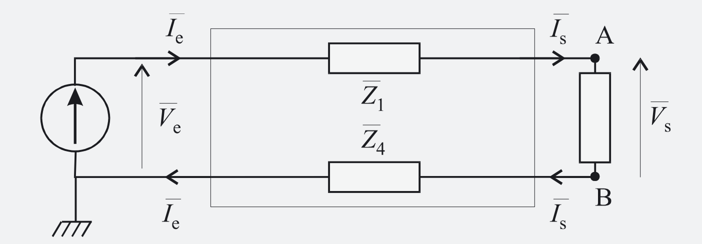


Figure 6.58

- **Calcul de la matrice** $(\overline{Y}')$

Plaçons les courants et tensions sur le schéma de ce quadripôle Q′ (figure 6.58). En imaginant, comme pour l'exercice 6.18, que ce quadripôle est alimenté par un générateur connecté à ses bornes d'entrée, et qu'il débite dans une charge connectée à ses bornes de sortie, on a immédiatement :

$$\overline{I}_s = \overline{I}_e$$

Introduisons les potentiels aux points A et B. On a :

$$\overline{V}_s = \overline{V}_A - \overline{V}_B$$

$$\overline{V}_e - \overline{V}_A = \overline{Z}_1\overline{I}_s = \overline{Z}_1\overline{I}_e \Rightarrow \overline{V}_A = \overline{V}_e - \overline{Z}_1\overline{I}_e$$

$$\overline{V}_B = \overline{Z}_4\overline{I}_s = \overline{Z}_4\overline{I}_e$$

D'où : $$\overline{V}_s = \overline{V}_A - \overline{V}_B = \overline{V}_e - \overline{Z}_1\overline{I}_e - \overline{Z}_4\overline{I}_e = \overline{V}_e - (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4)\overline{I}_e$$

Puisque l'on recherche les coefficients d'une matrice admittance, exprimons $\overline{I}_e$ en fonction de $\overline{V}_e$ et de $\overline{V}_s$:

$$\overline{I}_e = \frac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4}\overline{V}_e - \frac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4}\overline{V}_s$$

Par conséquent :

$$-\overline{I}_s = -\overline{I}_e = -\frac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4}\overline{V}_e + \frac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4}\overline{V}_s$$

Résumons ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \overline{I}_e \\ -\overline{I}_s \end{pmatrix} = (\overline{Y}')\begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} & -\dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} \\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} & \dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{V}_s \end{pmatrix}$$

- **Calcul de la matrice** $(\overline{Y}'')$

Plaçons les courants et tensions sur le schéma de ce quadripôle Q″ (figure 6.59). Comme précédemment, nous imaginons que ce quadripôle est alimenté par un générateur connecté à ses bornes d'entrée, et qu'il débite dans une charge connectée à ses bornes de sortie.

On a immédiatement :

$$\overline{I}_s = -\overline{I}_e$$

Introduisons les potentiels aux points A et B. On a :

$$\overline{V}_s = \overline{V}_A - \overline{V}_B$$

$$\overline{V}_A = -\overline{Z}_3\overline{I}_s = \overline{Z}_3\overline{I}_e$$

$$\overline{V}_e - \overline{V}_B = \overline{Z}_2\overline{I}_e \Rightarrow \overline{V}_B = \overline{V}_e - \overline{Z}_2\overline{I}_e$$

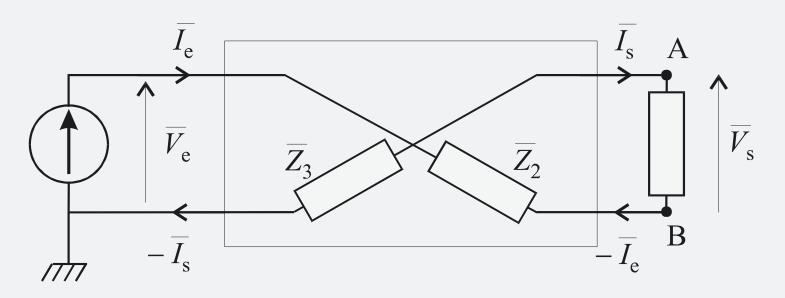


Figure 6.59

D'où : $$\overline{V}_s = \overline{Z}_3\overline{I}_e - \overline{V}_e + \overline{Z}_2\overline{I}_e$$

Soit : $$\overline{I}_e = \frac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\overline{V}_e + \frac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\overline{V}_s$$

Par conséquent :

$$-\overline{I}_s = \overline{I}_e = \frac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\overline{V}_e + \frac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\overline{V}_s$$

D'où l'expression de la matrice admittance du quadripôle Q'' :

$$\begin{pmatrix}\overline{I}_e\\ -\overline{I}_s\end{pmatrix} = \left(\overline{Y}''\right)\begin{pmatrix}\overline{V}_e\\ \overline{V}_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} & \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\\ \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} & \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{V}_e\\ \overline{V}_s\end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice admittance du quadripôle de la figure 6.29 a pour expression :

$$\left(\overline{Y}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} & -\dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4}\\ -\dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} & \dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} & \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\\ \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} & \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\end{pmatrix}$$

$$Soit\ : \left(\overline{Y}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} & \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} - \dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4}\\ \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} - \dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} & \dfrac{1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_4} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\end{pmatrix}$$

Dans le cas particulier où $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = \overline{Z}_4 = \overline{Z}$, cette matrice possède l'expression très simple suivante :

$$\left(\overline{Y}\right) = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2\overline{Z}} + \dfrac{1}{2\overline{Z}} & \dfrac{1}{2\overline{Z}} - \dfrac{1}{2\overline{Z}}\\ \dfrac{1}{2\overline{Z}} - \dfrac{1}{2\overline{Z}} & \dfrac{1}{2\overline{Z}} + \dfrac{1}{2\overline{Z}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\overline{Z}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\overline{Z}}\end{pmatrix}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Comme pour l'exercice précédent, l'identification d'une association en parallèle fait gagner beaucoup de temps. Ici, cette association est moins facile à mettre en évidence que dans le cas de l'exercice 6.20. Ne pas hésiter à bien analyser la configuration du quadripôle pour opter pour la méthode de résolution la plus pertinente.

22.

a. Par définition, la puissance complexe $\overline{P}_0$ a pour expression :

$$\overline{P}_0 = \overline{V}_{s0}\overline{I}^*$$

Or : $$\overline{I} = \frac{\overline{V}_{s0}}{\overline{Z}_s + \overline{Z}_e} = \frac{E_{eff}}{(R_s + R_e) + j(X_s + X_e)}$$

Donc : $$\overline{I}^* = \frac{E_{eff}}{(R_s + R_e) - j(X_s + X_e)}$$

D'où : $$\overline{P}_0 = \overline{V}_{s0}\overline{I}^* = \overline{V}_{s0}\overline{I}^* \frac{E^2_{eff}}{(R_s + R_e) - j(X_s + X_e)}$$

b. La puissance active P_{0a} délivrée par le générateur $\overline{V}_{s0}$ est égale à la partie réelle de $\overline{P}_0$.

Afin de faire apparaître sa partie réelle et sa partie imaginaire, transformons l'expression de $\overline{P}_0$ en multipliant son numérateur et son dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$\overline{P}_0 = \frac{E^2_{eff}\left[(R_s + R_e) + j(X_s + X_e)\right]}{\left[(R_s + R_e) - j(X_s + X_e)\right]\left[(R_s + R_e) + j(X_s + X_e)\right]}$$

Soit : $$\overline{P}_0 = \frac{E^2_{eff}\left[(R_s + R_e) + j(X_s + X_e)\right]}{\left[(R_s + R_e)^2 + (X_s + X_e)^2\right]}$$

D'où : $$P_{0a} = \Re e\left(\overline{P}_0\right) = \frac{E^2_{eff}(R_s + R_e)}{\left[(R_s + R_e)^2 + (X_s + X_e)^2\right]}$$

Calculons à présent la puissance complexe dissipée dans l'impédance de sortie. Par définition :

$$\overline{P}_s = \left(\overline{Z}_s\overline{I}\right)\overline{I}^*$$

Remplaçons $\overline{Z}_s$, $\overline{I}$ et $\overline{I}^*$ par leurs expressions.

$$\overline{P}_s = \frac{(R_s + jX_s)E_{eff}}{\left[(R_s + R_e) + j(X_s + X_e)\right]} \cdot \frac{E_{eff}}{\left[(R_s + R_e) - j(X_s + X_e)\right]}$$

D'où : $$\overline{P}_s = \frac{(R_s + jX_s)E^2_{eff}}{\left[(R_s + R_e)^2 + (X_s + X_e)^2\right]}$$

La puissance active dissipée dans $\overline{Z}_s$ est égale à la partie réelle de cette expression :

$$P_{sa} = \frac{R_s E^2_{eff}}{\left[(R_s + R_e)^2 + (X_s + X_e)^2\right]}$$

La puissance active P_{ea} se déduit facilement du principe de la conservation de l'énergie.

On a : $P_{ea} + P_{sa} = P_{0a}$

En régime sinusoïdal, le principe de la conservation de l'énergie s'applique indifféremment à la puissance complexe, à la puissance active et à la puissance réactive.

D'où : $$P_{ea} = P_{0a} - P_{sa} = \frac{R_e E^2_{eff}}{\left[(R_s + R_e)^2 + (X_s + X_e)^2\right]}$$

c. On choisit à présent :

$$X_s = -X_e \Rightarrow X_s + X_e = 0$$

Soit :

$$P_{ea} = \frac{R_e E_{eff}^2}{(R_s + R_e)^2}$$

Cherchons la valeur de R_e pour laquelle cette expression est maximale, R_s étant considérée comme une constante.

$$\frac{dP_{ea}}{dR_e} = \frac{E_{eff}^2(R_s + R_e)^2 - 2R_e E_{eff}^2(R_s + R_e)}{(R_s + R_e)^4}$$

Soit :

$$\frac{dP_{ea}}{dR_e} = \frac{E_{eff}^2\left(R_s^2 - R_e^2\right)}{(R_s + R_e)^4} = \frac{E_{eff}^2(R_s - R_e)}{(R_s + R_e)^3}$$

$$\frac{dP_{ea}}{dR_e} = 0 \Rightarrow R_e = R_s$$

La puissance P_{ea} possède donc un extremum pour $R_e = R_s$. Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.

En effet :

$$\begin{cases} R_e < R_s \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P_{ea}}{\mathrm{d}R_e} > 0 \\ R_e > R_s \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P_{ea}}{\mathrm{d}R_e} < 0 \end{cases}$$

P_{ea} est donc d'abord croissante, puis décroissante ; son extremum est donc bien un maximum. La puissance active dissipée dans l'impédance d'entrée du quadripôle Q″ est donc maximale pour $R_e = R_s$.

Calculons la valeur de ce maximum en remplaçant R_e par R_s dans l'expression de P_{ea} :

$$P_{ea_{max}} = \frac{R_s E_{eff}^2}{(R_s + R_s)^2} = \frac{E_0^2}{4R_s}$$

La puissance active dissipée dans l'impédance d'entrée du quadripôle Q" n'étant rien d'autre que la puissance que lui fournit le quadripôle Q', on en déduit donc qu'en ajustant, dans une association en cascade, la résistance d'entrée du quadripôle aval sur la résistance de sortie du quadripôle amont, le transfert d'énergie d'un quadripôle vers l'autre sera maximal.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Ce problème introduit une notion qui est d'une importance primordiale dans la pratique : l'adaptation d'impédance lors de la mise en cascade de deux dispositifs de type quadripôle. C'est lorsque les impédances de sortie et d'entrée des deux dispositifs connectés sont égales que le maximum de puissance est transféré entre le montage amont et le montage aval.

23.

a. Matrice de transfert du quadripôle

Le quadripôle est formé de l'association en cascade de deux quadripôles élémentaires identiques à celui présenté sur la figure 6.60. Calculons la matrice de transfert $\left(\overline{T}_e\right)$ de ce quadripôle élémentaire.

Le courant circulant dans le condensateur étant égal à $\overline{I}_e - \overline{I}_s$, on obtient en exprimant simplement la loi d'Ohm :

$$\overline{V}_s = \frac{1}{jC\omega}\left(\overline{I}_e - \overline{I}_s\right)$$

Par ailleurs, la loi d'Ohm aux bornes de R nous donne :

$$\overline{V}_e - \overline{V}_s = R\overline{I}_e$$

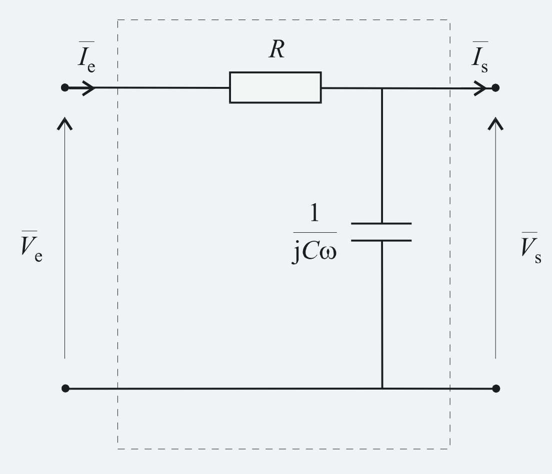


Figure 6.60

Pour déterminer la matrice de transfert, il nous faut exprimer les grandeurs de sortie $\overline{V}_s$ et $\overline{I}_s$ en fonction des grandeurs d'entrée $\overline{V}_e$ et $\overline{I}_e$. C'est déjà chose faite en partie puisque :

$$\overline{V}_e - \overline{V}_s = R\overline{I}_e \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_s = \overline{V}_e - R\overline{I}_e$$

On en déduit par ailleurs :

$$\overline{V}_s = \frac{1}{jC\omega}\left(\overline{I}_e - \overline{I}_s\right) = \overline{V}_e - R\overline{I}_e$$

D'où :
$$\left(\overline{I}_e - \overline{I}_s\right) = jC\omega\overline{V}_e - jRC\omega\overline{I}_e$$

Soit :
$$\overline{I}_s = -jC\omega\overline{V}_e + (1 + jRC\omega)\,\overline{I}_e$$

En conclusion :
$$\begin{cases} \overline{V}_s = \overline{V}_e - R\overline{I}_e \\ \overline{I}_s = -jC\omega\overline{V}_e + (1 + jRC\omega)\,\overline{I}_e \end{cases}$$
que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_s \\ \overline{I}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ -jC\omega & 1 + jRC\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{V}_e \\ \overline{I}_e \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert d'un des deux quadripôles élémentaires de la figure 6.60 est donc égale à :

$$\left(\overline{T}_e\right) = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ -jC\omega & 1 + jRC\omega \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc facilement calculer la matrice de transfert $\left(\overline{T}\right)$ du quadripôle représenté sur la figure 6.31, puisque celui-ci est formé de l'association en cascade de deux de ces quadripôles élémentaires. Comme l'association en cascade se traduit par la multiplication des matrices de transfert, on a :

$$\left(\overline{T}\right) = \left(\overline{T}_e\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ -jC\omega & 1 + jRC\omega \end{pmatrix}^2$$

Soit :
$$\left(\overline{T}\right) = \begin{pmatrix} 1 + jRC\omega & -2R - jR^2C\omega \\ -2jC\omega + RC^2\omega^2 & 3jRC\omega + 1 - R^2C^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

b. Détermination de $\overline{V}_{s0}$

Puisque nous cherchons la tension de sortie à vide, on a $\overline{I}_s = 0$. D'après les résultats de la première question :

$$\begin{cases} \overline{V}_{s0} = (1 + jRC\omega)\overline{V}_e - \left(2R + jR^2C\omega\right)\overline{I}_e \\ 0 = \left(-2jC\omega + RC^2\omega^2\right)\overline{V}_e + \left(3jRC\omega + 1 - R^2C^2\omega^2\right)\overline{I}_e \end{cases}$$

D'où : $$\overline{I}_e = \frac{2jC\omega - RC^2\omega^2}{3jRC\omega + 1 - R^2C^2\omega^2}\overline{V}_e$$

Donc : $$\overline{V}_{s0} = (1 + jRC\omega)\overline{V}_e - \frac{\left(2R + jR^2C\omega\right)\left(2jC\omega - RC^2\omega^2\right)}{3jRC\omega + 1 - R^2C^2\omega^2}\overline{V}_e$$

Soit après simplifications et en considérant que $\overline{V}_e = \overline{E}$:

$$\overline{V}_{s0} = \left[\frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}\right]\overline{E}$$

c. Calcul de l'impédance de sortie

On obtient l'impédance de sortie en déterminant l'impédance équivalente vue de la sortie du quadripôle, en ayant court-circuité la source de tension placée à l'entrée (figure 6.61).

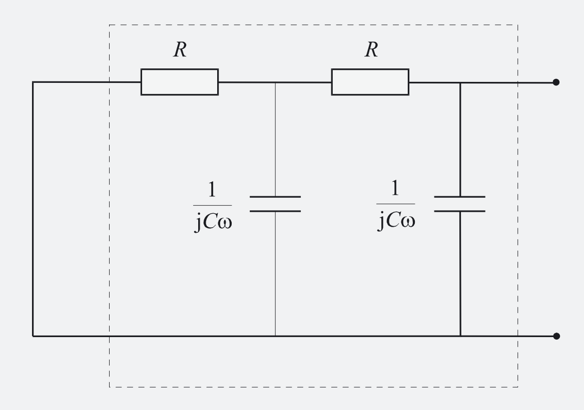


Figure 6.61

Ce schéma se transforme facilement en remarquant tout d'abord l'association en parallèle de la première résistance à gauche, avec le premier condensateur. Cette association forme une impédance équivalente $\overline{Z}_1$ telle que :

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{R} + jC\omega \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_1 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

On voit bien sur la figure 7.14 que $\overline{Z}_1$ et R sont en série et forment donc une impédance équivalente $\overline{Z}_2 = \overline{Z}_1 + R$.

D'où : $$\overline{Z}_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega} + R = \frac{R + R(1 + jRC\omega)}{1 + jRC\omega} = \frac{2R + jR^2C\omega}{1 + jRC\omega}$$

$\overline{Z}_2$ et $\dfrac{1}{jC\omega}$ se trouvent finalement en parallèle et forment bien l'impédance équivalente dite de sortie du quadripôle.

Donc : $$\frac{1}{\overline{Z}_s} = \frac{1 + jRC\omega}{2R + jR^2C\omega} + jC\omega = \frac{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}{2R + jR^2C\omega}$$

Soit : $$\overline{Z}_s = R \times \frac{2 + jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}$$

d. Calcul du courant en charge

On connecte une résistance de charge R_c en sortie du quadripôle. Le schéma équivalent au montage de départ est donné figure 6.62. On a donc :

$$\overline{I} = \frac{\overline{V_{s0}}}{\overline{Z_s} + R_c} = \frac{\left[\dfrac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}\right]\overline{E}}{R \times \dfrac{2 + jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega} + R_c}$$

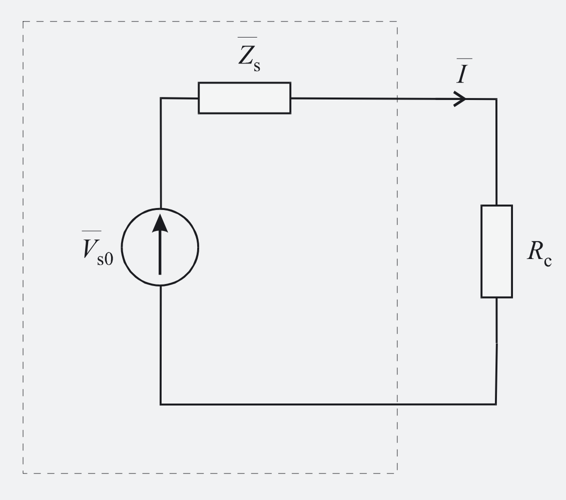


Figure 6.62

Multiplions numérateur et dénominateur par $\left(1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega\right)$.

On obtient :

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{2R + jR^2C\omega + R_c\left(1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega\right)}$$

La valeur efficace du courant qui circule dans la résistance R_c est égale au module de $\overline{I}$. Séparons partie réelle et partie imaginaire au dénominateur.

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{2R + R_c - R_cR^2C^2\omega^2 + jR^2C\omega + 3jR_cRC\omega}$$

D'où :

$$I_{eff} = \left|\overline{I}\right| = \frac{E_{eff}}{\sqrt{\left(2R + R_c - R_cR^2C^2\omega^2\right)^2 + \left(R^2C\omega + 3R_cRC\omega\right)^2}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : La modélisation du quadripôle sous la forme tension de sortie à vide et impédance de sortie, autrement dit, sous la forme du dipôle de Thévenin équivalent à ses bornes de sortie est la technique généralement employée pour déterminer le courant circulant dans la charge connectée à sa sortie. On mesure, à la question 4, tout l'intérêt d'avoir déterminé cet équivalent.

La jonction PN et les diodes à semi-conducteurs

7

Mots-clés

conduction électrique intrinsèque ▪ semi-conducteurs ▪ jonction PN ▪ diode à jonction ▪ anode ▪ cathode ▪ effet d'avalanche ▪ diode parfaite ▪ diode idéale ▪ polarisation ▪ puissance dissipée dans une diode ▪ diode Zener ▪ ecrêtage ▪ redressement

À la différence des dipôles passifs étudiés jusqu'à présent, la diode est un dipôle dont la caractéristique n'est pas linéaire. Autrement dit, la relation qui lie le courant qui la traverse à la tension présente à ses bornes n'est pas régie par une équation différentielle linéaire. Cela lui confère des propriétés bien spécifiques qui la rendent utile dans des montages particulièrement intéressants dès lors que l'on souhaite transformer la forme des signaux électriques. On a ainsi l'habitude de dire communément que la diode laisse passer le courant dans un sens et pas dans l'autre. Par ailleurs, la diode est la brique de base de toute l'électronique moderne, autrement dit la branche de l'électricité fondée sur les composants à semi-conducteurs et dont l'intérêt n'est plus à démontrer dans les domaines du traitement du signal et de l'information.

Fiche 1

La conduction électrique intrinsèque

Dans un matériau à structure cristalline, les atomes sont liés entre eux par des liaisons dites covalentes qui consistent en des combinaisons d'électrons entre atomes voisins. Ces liaisons peuvent être plus ou moins fortes. Dans le cas d'une liaison très forte, les électrons participant à cette liaison seront difficilement mobilisables. En revanche, si cette liaison est plus faible, un apport d'énergie extérieur, par exemple un champ électrique, peut être suffisant pour mobiliser ces électrons : ces électrons sont dits ń libres ż, libres de se déplacer dans la structure cristalline : c'est le phénomène de la conduction électrique intrinsèque. En quittant sa position initiale, un électron devenu libre laisse derrière lui un ń trou ż correspondant à une vacance d'électron. L'atome étant initialement neutre, un trou est donc chargé positivement. Ce trou peut bien sûr être comblé par un autre électron libre venu d'un atome voisin. Dans ce cas, le trou ń se déplace ż en sens contraire du déplacement de l'électron. La conduction électrique peut tout aussi bien être interprétée comme un déplacement de trous que comme un déplacement d'électrons.

Les électrons libres sont appelés porteurs de charge négatifs. Les trous sont les porteurs de charge positifs.

On modélise la faculté des électrons à se mobiliser pour participer à un phénomène de conduction par des bandes d'énergies (figure 7.1) :

- bande de valence : tant qu'un électron se trouve dans cette bande, il participe à une liaison covalente au sein du cristal ;
- bande de conduction : un électron ayant acquis suffisamment d'énergie peut se trouver dans cette bande ; il est alors mobile et peut participer à un phénomène de conduction ;
- bande interdite : la mécanique quantique a montré que les électrons ne peuvent pas prendre des niveaux d'énergie quelconques, mais que ceux-ci sont quantifiés ; entre la bande de valence et la bande de conduction peut donc exister une bande interdite. Pour rendre un électron mobile, il faut donc impérativement apporter de l'énergie en quantité suffisante pour franchir ce véritable fossé (gap en anglais).

L'énergie d'un électron se mesure en électron-volts (eV) :1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J

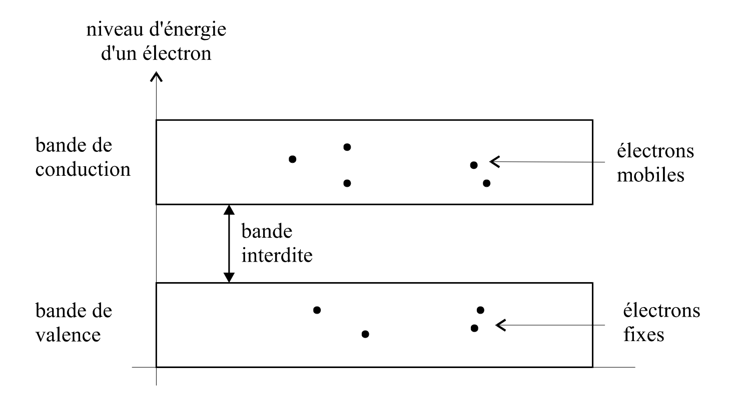


Figure 7.1

En fonction de la disposition de ces bandes, et surtout de la largeur de la bande interdite, les matériaux peuvent être isolants, conducteurs ou semi-conducteurs (figure 7.2).

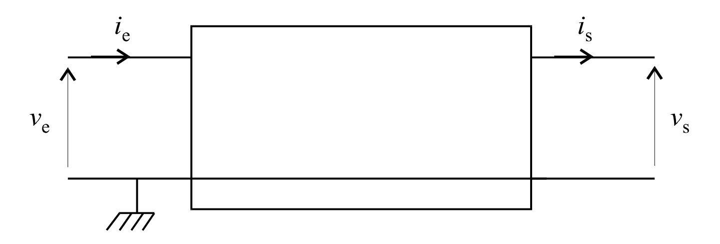


Figure 7.2

La principale différence entre un conducteur et un semi-conducteur réside dans le fait que dans le premier, il n'y a pas ou peu de bande interdite, voire même chevauchement des bandes de valence et de conduction. Les électrons sont donc *a priori* mobiles et l'application d'un faible champ électrique génère une circulation de nombreux électrons. Dans un semi-conducteur, il y a beaucoup moins d'électrons mobiles. Le matériau est donc moins conducteur.

Quel que soit le cas, la conduction est dite intrinsèque lorsqu'il existe autant d'électrons libres que de trous par unité de volume : soit n et p les nombres respectifs de porteurs négatifs (électrons) et de porteurs positifs (trous) par unité de volume (concentrations) ; on montre que :

$$n^2 = p^2 = n_i^2 = AT^3 e^{-\frac{\Delta B_i}{kT}}$$

avec :

A : constante dépendant du matériau,

T : température absolue en kelvins,

ΔB_i : largeur de la bande interdite en eV,

$k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ JK $^{-1}$: constante de Boltzmann

Ces concentrations n et p (notée parfois n_i ou p_i) sont appelées concentrations en porteurs intrinsèques.

Pour le Silicium qui est le semi-conducteur le plus utilisé on a :

$\Delta B_i = 1{,}2$ eV

$n_i = 1{,}5 \times 10^{16}$ m^{-3} à $T = 300$ K

Fiche 2

Semi-conducteurs dopés

Si on remplace dans un cristal de Silicium très pur, certains atomes par des atomes d'un autre corps simple, on dit que l'on dope le cristal avec des impuretés. Le Silicium étant tétravalent, on peut choisir d'effectuer ce dopage avec des atomes trivalents (Bore, Aluminium ou Gallium) ou pentavalents (Phosphore, Arsenic ou Antimoine). Dans le premier cas on créera un déficit en électrons ou plutôt un apport de trous. On dit que le semi-conducteur est dopé P et que les impuretés introduites sont accepteuses d'électrons. Dans le second cas, on créée au contraire un apport d'électrons mobiles. Le semi-conducteur est dopé N et les impuretés sont dites donneuses d'électrons.

La concentration en impureté dopante reste toujours très faible quel que soit le cas : de l'ordre de 1 atome d'impureté pour 10^7 atomes de silicium.

Si le semi-conducteur est dopé N, il y a beaucoup plus d'électrons libres que de trous. On dit que les électrons sont les porteurs de charge majoritaires. Dans le cas d'un dopage P, ce sont les trous qui sont les porteurs majoritaires. Dans les deux cas on a :$n \neq p$.

En revanche, on a toujours : $np = n_i^2$

Pour un semi-conducteur dopé N, soit n_D la concentration en impureté donneuses d'électrons (nombre d'atomes d'impureté par unité de volume). On a alors : $n \approx n_\mathrm{D}$ et $p \approx 0$.

Pour un semi-conducteur dopé P, soit n_A la concentration en impureté accepteuse d'électrons (nombre d'atomes d'impureté par unité de volume). On a alors : $p \approx n_\mathrm{A}$ et $n \approx 0$.

Quel que soit le cas, les phénomènes de conduction s'en trouvent très largement modifiés. La conduction est alors dite extrinsèque car ne dépendant plus uniquement du cristal de départ.

Fiche 3

La diode à jonction

En dopant respectivement N et P deux parties d'un même cristal semi-conducteur, on forme un dipôle appelé diode à jonction (figure 7.3). La jonction est la surface de contact située entre les deux parties du cristal dopées différemment.

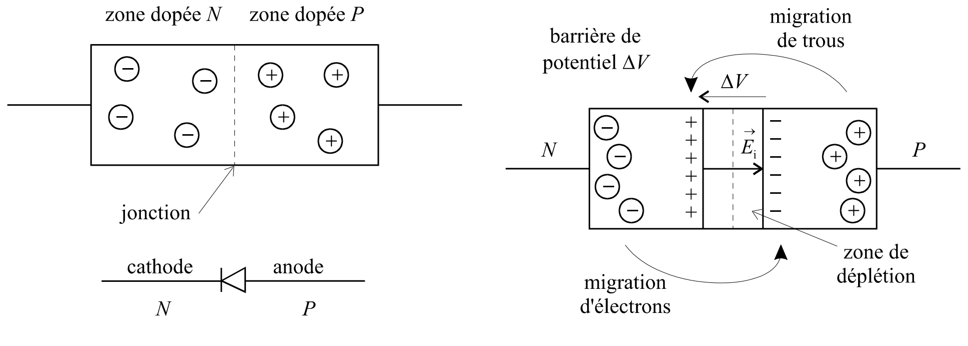


Figure 7.3 Figure 7.4

Bien qu'au départ chacune des deux zones soit électriquement neutre, la mise en contact des deux parties induit un phénomène de migration de porteurs majoritaires de part et d'autre de la jonction : certains trous de la zone P se déplacent vers la zone N qui contient des donneurs d'électrons, tandis que certains électrons de la zone N migrent vers la zone P qui contient des accepteurs d'électrons.

Un équilibre s'instaure autour de la jonction, créant ainsi un champ électrique interne $\vec{E}_\mathrm{i}$. La zone située autour de la jonction correspondant à ce champ électrique est appelée zone de déplétion (figure 7.4). La présence de ce champ électrique se traduit également par la présence d'une différence de potentiel de part et d'autre de la zone de déplétion. Cette différence de potentiel est appelée barrière de potentiel. La zone de déplétion se comporte a priori comme un isolant et il devient très difficile pour un électron libre, de franchir cette zone.

Caractéristiques électriques des diodes à jonction

L'application d'une tension V dirigée comme indiqué sur la figure 7.5 crée un champ électrique qui s'ajoute au champ électrique interne (dans le même sens) poussant ainsi les électrons de la zone N a s'éloigner de la jonction, tandis que les trous de la zone P subissent le même phénomène : la zone de déplétion s'élargit ; la jonction devient pratiquement isolante. On dit que la diode est bloquée.

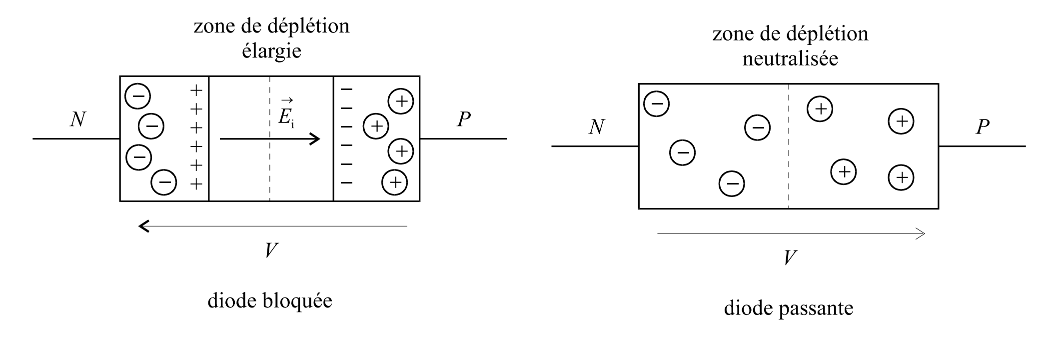


Figure 7.5

Figure 7.6

Si au contraire on applique une tension V orientée comme indiqué sur la figure 7.6, le champ électrique externe ainsi créé s'oppose au champ interne. La barrière de potentiel est ainsi diminuée : des électrons peuvent franchir la zone de déplétion (de la zone N vers la zone P compte tenu de l'orientation de V) qui devient donc conductrice ; la diode est dite passante. La propriété essentielle de cette diode réside donc dans le fait que la circulation des électrons au travers de la jonction ne peut s'effectuer que dans un sens : de la zone N vers la zone P (de la cathode vers l'anode). Soit V la tension aux bornes de la diode et I le courant qui la traverse. Comme le courant circule de l'anode vers la cathode (sens inverse des électrons), on représentera tension et courant comme cela est indiqué sur la figure 7.7 (convention récepteur).

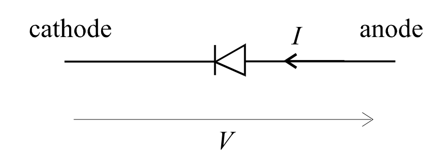


Figure 7.7

Si V est effectivement positif, on dit que la diode est polarisée en sens direct. Un courant I peut effectivement circuler dans la diode. Si V est négatif, la diode est polarisée en sens inverse et aucun courant ne peut y circuler. La figure 7.8 montre la caractéristique $I = f(V)$ d'une diode courante.

En sens direct, on admet que :

$$I = I_s e^{\frac{Ve}{kT}} = I_s e^{\frac{V}{V_0}} \text{ avec } V_0 = \frac{kT}{e} = 25 \text{ mV à température ambiante.}$$

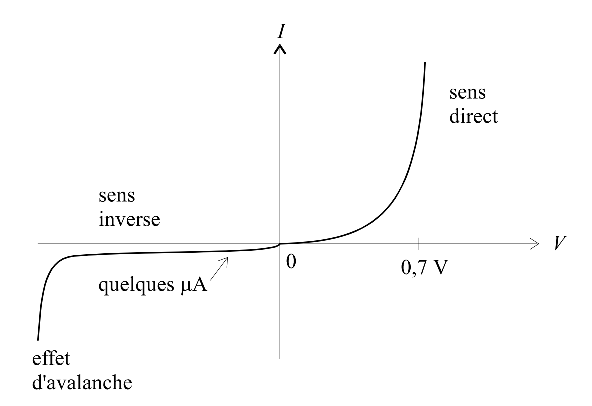
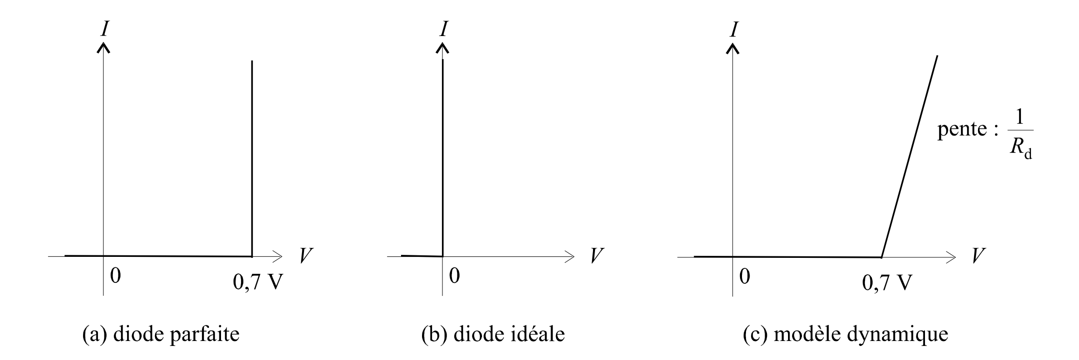


Figure 7.8

I_s étant de l'ordre du mA, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1}. Sauf pour de très faibles valeurs de I, et sauf pour des valeurs très importantes, la tension V varie peu et est de l'ordre de 0,6 à 0,7 V pour des diodes au silicium. Cette tension est appelée tension de seuil et se note souvent V_s. En sens inverse, on admet que le courant est nul (en réalité quelques μA subsistent). Pour des tensions inverses importantes (quelques dizaines de volts en valeur absolue), on observe un effet de conduction forcée au travers de la jonction, effet immédiat et en général destructeur : l'effet d'avalanche.

- diode polarisée en sens direct : $V = 0{,}7$ V, $\forall I$; la diode est dite passante ;
- diode polarisée en sens inverse : $I = 0$, $\forall V$; la diode est dite bloquée.

Ce modèle de diode dite parfaite est représenté sur la figure 7.9 (a).



(a) diode parfaite (b) diode idéale (c) modèle dynamique

Figure 7.9

On peut encore simplifier le modèle en considérant que la tension de 0,7 V est négligeable devant les autres tensions du circuit. On obtient alors le modèle de diode dite idéale dont la caractéristique est schématisée sur la figure 7.9 (b). Si au contraire on souhaite un modèle plus fin et plus proche de la caractéristique de la diode réelle, on peut adopter le modèle représenté sur la figure 7.9 (c) : on considère que cette caractéristique est formée de deux segments de droites :

$V < 0{,}7\,\text{V} \Leftrightarrow I = 0$ (diode bloquée)

$V > 0{,}7\,\text{V} \Leftrightarrow I = \dfrac{V - 0{,}7\,\text{V}}{R_d}$ avec R_d résistance dynamique de la diode passante.

Fiche 5

Polarisation de la diode

On polarise une diode en sens direct en l'incluant dans un circuit de sorte qu'elle soit parcourue par un courant I. Sur le schéma de la figure 7.10, un générateur parfait de tension E continue alimente un dipôle formé d'une résistance R et d'une diode en série.

On a évidemment : $I = I_s e^{\frac{V}{V_0}}$ et $E = RI + V$

soit encore : $\begin{cases} I = I_s e^{\frac{V}{V_0}} & \rightarrow \text{ caractéristique de la diode} \\ I = \dfrac{E - V}{R} & \rightarrow \text{ droite de charge} \end{cases}$

Le point d'intersection de ces deux courbes donne le point de fonctionnement du circuit (figure 7.11). On voit bien que pour diverses valeurs de R, la tension V varie peu.

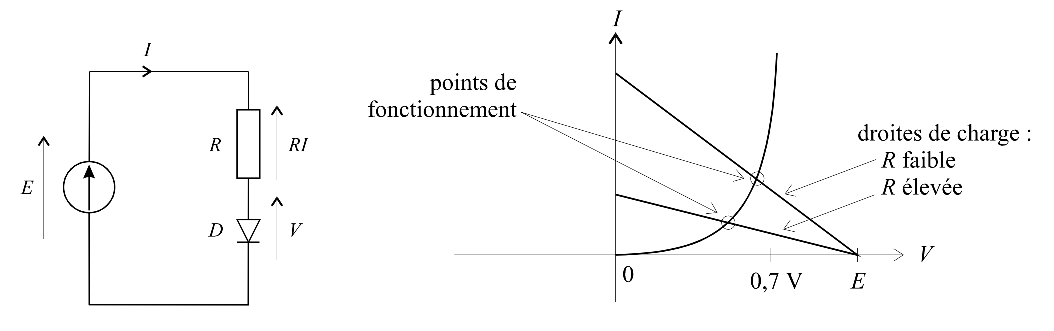


Figure 7.10

Figure 7.11

Fiche 6

Puissance dissipée dans une diode

En sens direct, la diode parcourue par un courant I et présentant à ses bornes une différence de potentiel V, dissipe (en général sous forme d'énergie calorifique) la puissance $P = VI$. Toute diode possède une puissance limite admissible P_{max}. Graphiquement, cette puissance définit une zone de fonctionnement possible pour la diode (figure 7.12).

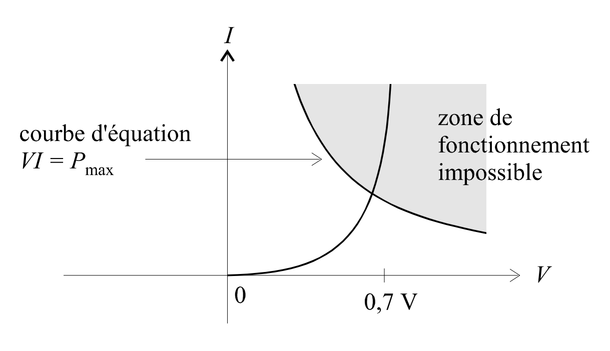


Figure 7.12

Diodes Zener

Certaines diodes sont conçues de manière à ce que l'effet d'avalanche ne soit pas destructeur, mais soit au contraire maîtrisé et même utile. Dans ce cas, on parle d'effet Zener et de telles diodes sont appelées diodes Zener (figure 7.13).

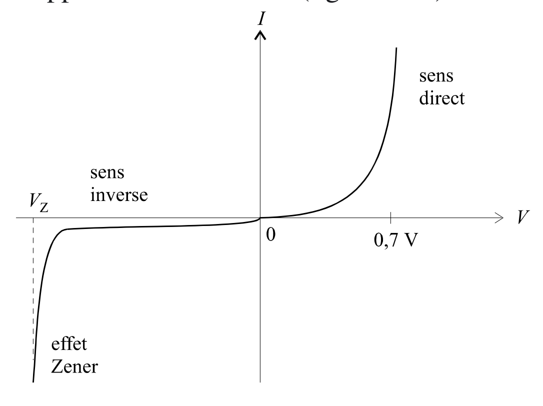


Figure 7.13

Une diode Zener se polarise en sens inverse (figure 7.14), et présente à ses bornes, quel que soit le courant qui la traverse, une tension quasiment constante appelée tension Zener et notée V_Z (figure 7.13). Les tensions Zener des diodes Zener couramment utilisées vont de quelques dixièmes de volts à plusieurs dizaines de volts (en valeur absolue).

Cette propriété est très utilisée dans des montages régulateurs de tension où l'on exploite comme référence de tension la valeur quasiment constante de la tension Zener V_Z.

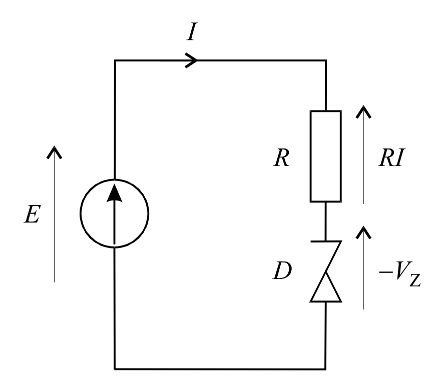


Figure 7.14

Entraînement

QCM

1. **Une diode de tension de seuil $V_s = 0,7$ V est placée en série avec une résistance $R = 40\ \Omega$. L'ensemble est alimenté par une générateur de tension parfait $E = 12$ V. La diode est polarisée en sens direct. Quelle est la valeur du courant I qui circule dans le circuit ?**

❑ a. $I = 0,28$ A
❑ b. $I = 17$ mA
❑ c. $I = 100$ mA
❑ d. $I = 0,32$ A

2. **Une diode de tension de seuil $V_s = 0,7$ V est placée en série avec une résistance $R = 10\ \Omega$. L'ensemble est alimenté par une générateur de tension parfait $E = 5$ V. La diode est polarisée en sens inverse. Quelle est la valeur de la tension U aux bornes de la résistance ?**

❑ a. $U = 5$ V
❑ b. $U = 0$ V
❑ c. $U = 0,7$ V
❑ d. $U = -0,7$ V

3. **Une diode idéale est placée en série avec une résistance $R = 100\ \Omega$. L'ensemble est alimenté par une générateur de tension parfait $E = 5$ V. La diode est polarisée en sens direct. Soit U la tension aux bornes de la diode et I le courant qui la traverse. Quel est le point de fonctionnement (U, I) de la diode ?**

❑ a. $U = 0,7$ V, $I = 43$ mA
❑ b. $U = 0$ V, $I = 50$ mA
❑ c. $U = 5$ V, $I = 50$ mA
❑ d. $U = 0,7$ V, $I = -43$ mA

4. **Une diode de tension de seuil $V_s = 0,7$ V est placée en série avec une résistance R. L'ensemble est alimenté par une générateur de tension parfait $E = 10$ V. La diode est polarisée en sens direct. Quelle est la valeur de R permettant d'obtenir un courant $I = 100$ mA dans le circuit ?**

❑ a. $R = 100\ \Omega$
❑ b. $R = 7\ \Omega$
❑ c. $R = 93\ \Omega$
❑ d. $R = 10\ \Omega$

5. **Une diode de tension de seuil $V_s = 0,7$ V est placée en série avec une résistance R. L'ensemble est alimenté par une générateur de tension parfait $E = 12$ V. La diode est polarisée en sens direct. La puissance maximale admissible par la diode est égale à $P_{max} = 280$ mW. Quelle condition doit remplir la résistance R pour que la diode reste dans son domaine de fonctionnement ?**

❑ a. $R > 1,75\ \Omega$
❑ b. $R < 1,75\ \Omega$
❑ c. $R < 28,25\ \Omega$
❑ d. $R > 28,25\ \Omega$

6. **Une diode idéale (tension de seuil $V_s = 0$ V) est placée en série avec une résistance R et l'ensemble est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale parfait $e(t) = E_0 \cos \omega t$. Laquelle de ces affirmations est fausse ?**

❑ a. La puissance moyenne consommée par la diode est nulle.

❑ b. Le courant dans la diode est nul pour chaque demi-période correspondant à $e(t) < 0$.

❑ c. La tension aux bornes de la résistance est égale à $e(t)$ lorsque $e(t) > 0$.

❑ d. Le générateur ne délivre de la puissance que pendant sa demi-alternance positive.

7. **La résistance dynamique d'une diode :**

❑ a. est en général très élevée.

❑ b. permet de considérer que la diode est équivalente à cette résistance lorsqu'elle est passante.

❑ c. s'exprime en siemens.

❑ d. est en général très faible.

8. **Une diode Zener de tension Zener $V_Z = 5$ V est placée en série avec une résistance $R = 10\ \Omega$. Le tout est placé aux bornes d'un générateur de tension parfait $E = 12$ V de sorte que la diode Zener soit polarisée en sens inverse. Quelle est la puissance P consommée par la diode Zener ?**

❑ a. a. $P = 8,4$ W

❑ b. b. $P = 3,5$ W

❑ c. c. $P = 6$ W

❑ d. d. $P = 1,6$ W

Réponses

1. **a.**
C'est la loi d'Ohm aux bornes de la résistance qui permet de déterminer le courant. Comme la diode est polarisée en sens direct, elle présente à ses bornes une tension $U = 0,7$ V. La tension aux bornes de la résistance est donc égale à $U_R = 11,3$ V puisque l'ensemble est soumis à une tension $E = 12$ V. Le courant se détermine donc immédiatement :$I = \frac{11,3}{40} = 0,28$ A.

2. **b.**
Comme la diode est polarisée en sens inverse, aucun courant ne circule ni dans la diode, ni dans la résistance. Cette dernière présente donc à ses bornes une tension nulle.

3. **b.**
La diode idéale est caractérisée par une tension nulle à ses bornes lorsqu'elle est polarisée en sens direct. On a donc $U = 0$ V. La tension aux bornes de la résistance est donc égale à $E = 5$ V et c'est elle qui va déterminer l'intensité du courant : $I = \frac{E}{R} = \frac{5}{100} = 50$ mA.

4. **c.**
La tension aux bornes de la résistance est égale à $U = 10 - 0,7 = 9,3$ V. Il suffit d'appliquer la loi d'Ohm avec la valeur du courant souhaitée : $U = RI$, soit $R = \frac{U}{I} = \frac{9,3}{0,1} = 93\ \Omega$.

5. **d.**
Il s'agit ici de limiter le courant dans la diode pour que la limite de puissance ne soit pas atteinte. La tension aux bornes de la résistance est égale à $U_R = E - V_s$. En appelant $I_{\max}$ le courant maximal dans la résistance, il faut donc que la résistance soit supérieure à une valeur $R_{\min}$ telle que $I_{\max} = \frac{E - V_s}{R_{\min}}$. Or $P_{\max} = V_s I_{\max}$.

D'où $R_{\min} = \frac{E - V_s}{I_{\max}} = \frac{V_s(E - V_s)}{P_{\max}} = \frac{0,7 \times 11,3}{280 \times 10^{-3}} = 28,25\ \Omega$.

6. **a.**
La diode est polarisée en sens direct au cours de chaque demi-alternance positive du signal d'alimentation. La diode est alors parcourue par un courant non nul. Mais en théorie, comme la diode est idéale, elle présente à ses bornes une tension nulle ce qui conduit au calcul d'une puissance consommée nulle. Toutefois, une diode ne peut pas ne pas consommer de puissance lorsqu'elle est polarisée en sens direct. Le fait est qu'il est impossible de déterminer la puissance qu'elle consomme avec le modèle de diode idéale.

7. **d.**
La pente de la caractéristique de la diode en sens direct est plutôt élevée et cette pente est l'inverse de la résistance dynamique. Attention, la diode n'est pas équivalente à sa résistance dynamique. Et bien sûr, cette résistance dynamique s'exprime en ohms.

8. **b.**
C'est la résistance qui fixe le courant dans le circuit. Étant donné que la résistance présente à ses bornes une tension égale à $E - V_Z = 7$ V, ce courant I est égal à $I = \frac{E - V_Z}{R} = \frac{7}{10} = 700$ mA.
La puissance consommée par la diode est donc égale à $P = V_Z I = 5 \times 0,7 = 3,5$ W.

Entraînement

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
1.	Dans un matériau quelconque, les électrons mobiles se trouvent dans la bande valence.	☐	☐
2.	La principale différence entre des matériaux isolants et conducteurs réside dans la présence ou non d'une bande interdite qui empêche ou autorise les électrons à se mouvoir librement dans le matériau.	☐	☐
3.	Dans un matériaux semi-conducteur, la bande interdite possède une largeur d'environ 1 eV.	☐	☐
4.	Un semi-conducteur dopé N est enrichi en atomes pentavalents.	☐	☐
5.	Dans une diode au repos (qui n'est donc connectée à aucun circuit ni aucune alimentation), il règne un champ électrique interne.	☐	☐
6.	Dans une diode à jonction, la zone dopée P correspond à la cathode.	☐	☐
7.	Polariser une diode en sens direct revient à annuler son champ électrique interne.	☐	☐
8.	Dans une diode polarisée en sens direct, le courant circule positivement de la cathode vers l'anode.	☐	☐
9.	Le point de fonctionnement d'une diode correspond à l'intersection de sa caractéristique avec la droite de charge du circuit dans lequel elle est incluse.	☐	☐
10.	Dans une diode polarisée en sens inverse, la zone de déplétion est pratiquement inexistante.	☐	☐
11.	Dans une diode classique, l'effet d'avalanche se produit lorsque la tension en sens direct dépasse un certain seuil.	☐	☐
12.	Lorsqu'elle est polarisée en sens inverse, la diode est le siège d'un courant pouvant atteindre quelques milliampères.	☐	☐
13.	Quand on considère le modèle de diode idéale, la tension en sens direct aux bornes de la diode est nulle.	☐	☐
14.	La résistance dynamique d'une diode correspond à l'inverse de la pente de la droite à laquelle on assimile la caractéristique de la diode en sens direct.	☐	☐
15.	Lorsqu'elle est polarisée en sens inverse, une diode ne consomme pratiquement pas de puissance.	☐	☐
16.	Une diode Zener doit toujours être polarisée en sens inverse.	☐	☐

Réponses

1. **Faux.** Les électrons libres se trouvent dans la bande de conduction.
2. **Vrai.** Il n'y a aucune bande interdite dans un matériau conducteur tandis qu'il en existe une dans les matériaux isolants.
3. **Vrai.** Les matériaux semi-conducteurs possèdent une bande interdite de taille intermédiaire entre les isolants et les conducteurs.
4. **Vrai.** Les atomes pentavalents sont en quelque sorte des donneurs d'électrons au sein d'un cristal de Silicium.
5. **Vrai.** Même lorsque la diode n'est pas sollicitée, elle est le siège d'un champ électrique interne dû à la migration de certains porteurs de charge de part et d'autre de la jonction.
6. **Faux.** La zone dopée P correspond à l'anode.
7. **Vrai.** C'est le champ électrique interne qui crée une barrière de potentiel infranchissable, sauf si on applique une tension en sens direct qui le neutralise.
8. **Faux.** Le courant circule en sens direct de l'anode vers la cathode.
9. **Vrai.** Le point de fonctionnement correspond au couple de valeurs (V, I) auxquelles est soumise la diode.
10. **Faux.** Au contraire, en polarisant une diode en sens inverse, on accroît la largeur de la zone de déplétion, ce qui interdit le passage des électrons.
11. **Faux.** L'effet d'avalanche est susceptible de se produire lorsque la diode est polarisée en sens inverse.
12. **Faux.** Seuls quelques micro-ampères peuvent circuler dans la diode polarisée en sens inverse mais on considère le plus souvent que le courant est nul dans ce cas.
13. **Vrai.** Ne pas confondre diode parfaite et diode idéale. On utilise le modèle de diode idéale lorsque les tensions mises en jeu au sein du circuit sont très supérieures à 0,7 V.
14. **Vrai.** On utilise ce modèle lorsque celui de la diode parfaite est insatisfaisant car c'est celui qui se rapproche le plus de la caractéristique réelle.
15. **Vrai.** En considérant que le courant qui la traverse est quasiment nul, on a bien une puissance consommée qui l'est aussi, quelle que soit la tension inverse aux bornes de la diode.
16. **Vrai.** Sa propriété fondamentale réside dans la constance de la tension à ses bornes en sens inverse, quel que soit le courant qui la traverse. L'effet Zener est un effet d'avalanche « maîtrisé ».

Exercices

1. Détermination de l'état d'une diode parfaite polarisée dans un pont diviseur *

Dans le circuit représenté sur la figure 7.15, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Dans le cas où la diode est passante, déterminer le courant I qui la traverse. On supposera que la diode est parfaite et possède une tension de seuil égale à 0,7 V. (caractéristique de la figure 7.9 a).

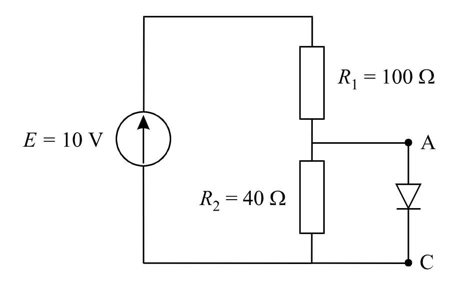


Figure 7.15

Conseil méthodologique

La technique la plus efficace pour démontrer qu'une diode est passante ou bloquée consiste à supposer *a priori* qu'elle est dans un de ces deux états, par exemple qu'elle est bloquée. Si tel est le cas, ceci est très facile à vérifier ; dans le cas contraire, si elle est passante, on aboutit très vite à une absurdité qui montre qu'elle ne peut être bloquée. Dans cet exercice, on supposera que la diode est bloquée et on cherchera la différence de potentiels à ses bornes.

2. Détermination de l'état d'une diode parfaite en série avec une résistance **

Dans le circuit représenté sur la figure 7.16, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Dans le cas où la diode est passante, déterminer le courant I qui la traverse. On supposera que la diode est parfaite et possède une tension de seuil égale à 0,7 V. (caractéristique de la figure 7.9 a).

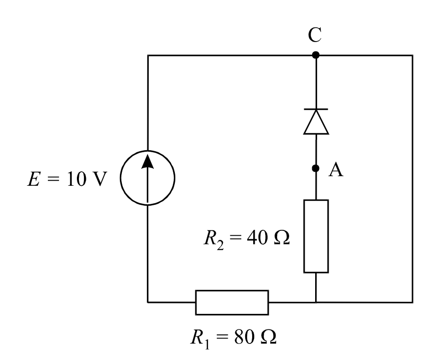


Figure 7.16

Conseil méthodologique

On supposera ici, comme pour l'exercice précédent, que la diode est bloquée. Le circuit se résume alors à une simple maille et il est relativement facile de constater que l'hypothèse de départ ne conduit pas à une absurdité. On supposera alors que la diode est passante avant de conclure.

3. Détermination de l'état d'une diode parfaite dans un pont de Wheatstone *

Dans le circuit représenté sur la figure 7.17, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Dans le cas où la diode est passante, déterminer le courant I qui la traverse. On supposera que la diode est parfaite et possède une tension de seuil égale à 0,7 V. (caractéristique de la figure 7.9 a).

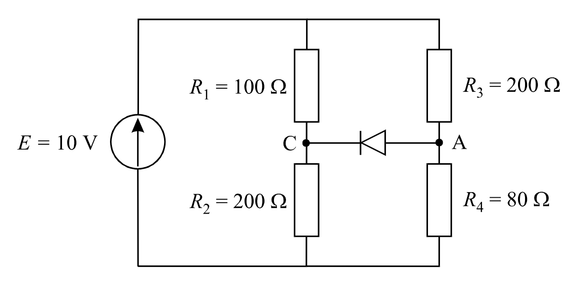


Figure 7.17

Conseil méthodologique

La technique ne change pas. On formulera une hypothèse de départ diode passante ou diode bloquée pour vérifier qu'une seule de ces hypothèses n'est possible.

4. Détermination de l'état d'une diode parfaite alimentée par deux générateurs *

Dans le circuit représenté sur la figure 7.18, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Dans le cas où la diode est passante, déterminer le courant I qui la traverse. On supposera que la diode est parfaite et possède une tension de seuil égale à 0,7 V. (caractéristique de la figure 7.9 a).

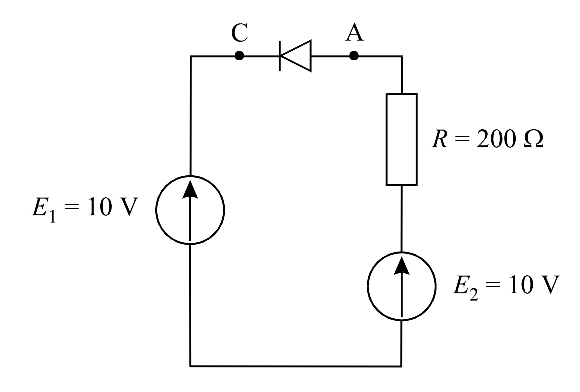


Figure 7.18

Conseil méthodologique

Dans cet exercice, on supposera que la diode est passante et on raisonnera sur le courant qui la traverse.

5. Puissance dissipée dans une diode en série avec une résistance *

Dans le circuit représenté sur la figure 7.19, déterminer la puissance dissipée dans la diode. La diode est supposée parfaite (caractéristique de la figure 7.9 a).

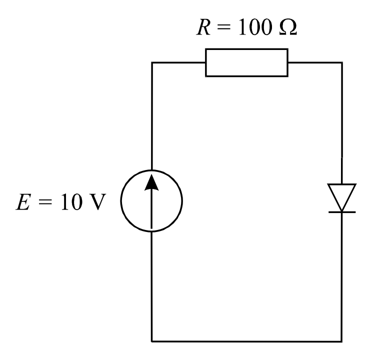


Figure 7.19

Conseil méthodologique

Bien que cela ne soit pas mentionné dans l'énoncé, il convient de vérifier, avant toute chose, que la diode est passante ou bloquée avant de calculer la puissance qu'elle dissipe. Si elle est passante, on cherchera l'intensité du courant qui la traverse.

6. Puissance dissipée dans une diode alimentée par un pont diviseur **

Dans le circuit représenté sur la figure 7.20, déterminer la puissance dissipée dans la diode. La diode est supposée parfaite (caractéristique de la figure 7.9 a).

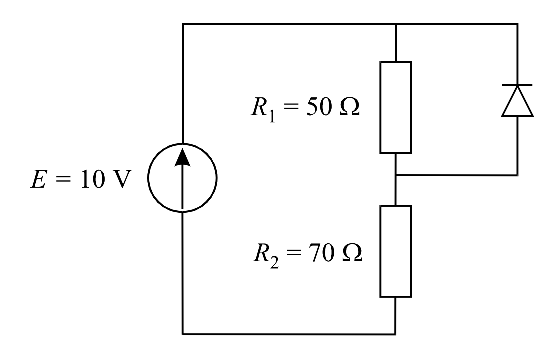


Figure 7.20

Conseil méthodologique

On formulera, avant de montrer qu'elle est fausse, l'hypothèse que la diode est passante. La conclusion sur la puissance dissipée est alors immédiate.

7. Puissance dissipée dans une diode en parallèle avec une résistance **

Dans le circuit représenté sur la figure 7.21, déterminer la puissance dissipée dans la diode. La diode est supposée parfaite (caractéristique de la figure 7.9 a).

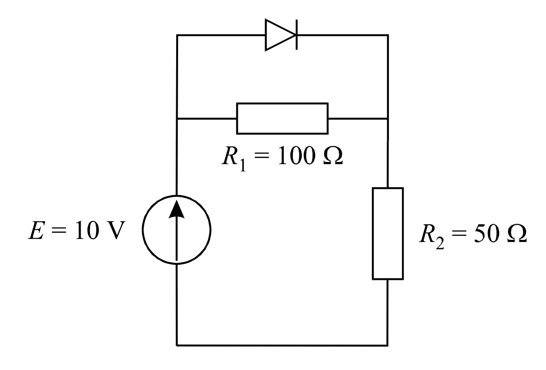


Figure 7.21

Conseil méthodologique

Toujours penser à vérifier l'état de la diode et si elle est passante, calculer le courant qui la traverse.

8. Puissance dissipée dans une diode en parallèle avec une résistance ***

Dans le circuit représenté sur la figure 7.22, déterminer la puissance dissipée dans la diode. La diode est supposée parfaite (caractéristique de la figure 7.9 a).

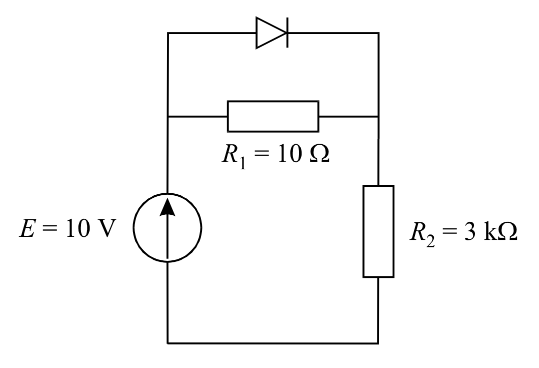


Figure 7.22

Conseil méthodologique

Même commentaire que pour l'exercice précédent avec, ici, un résultat différent.

9. Ajustement de la polarisation d'une diode ***

Une diode de tension de seuil $V_S = 0{,}7$ V et de résistance dynamique $r_d = 10\,\Omega$ (modèle de la figure 7.9 c) est placée dans le circuit de la figure 7.23. Déterminer la valeur de R qui assure un courant $I = 20$ mA dans le circuit. Même question si on choisit le modèle de diode parfaite (caractéristique de la figure 7.9 a).

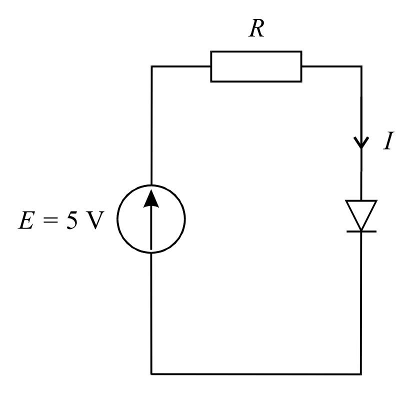


Figure 7.23

Conseil méthodologique

Attention, on utilise ici le modèle dynamique de la diode (figure 7.9 c). On écrira l'équation donnant l'expression de la tension aux bornes de la diode en fonction du courant qui la traverse. La loi des mailles nous donnera ensuite le résultat demandé.

10. Influence du modèle choisi dans le calcul de la puissance dissipée dans une diode **

Déterminer la puissance dissipée dans une diode de tension de seuil $V_S = 0{,}7$ V et de résistance dynamique $r_{\mathrm{d}} = 10\,\Omega$ parcourue par un courant $I = 25$ mA.

Déterminer cette même puissance en utilisant le modèle de la diode parfaite de la figure 7.9 (a), puis en utilisant la caractéristique réelle de la diode :

$$I = I_s e^{\frac{V}{V_0}} \text{ avec } V_0 = 25 \text{ mV et } I_s = 2 \times 10^{-15} \text{ A}$$

Conseil méthodologique

L'objectif de cet exercice consiste à calculer la puissance dissipée dans la diode en utilisant trois modèles différents. Comme le courant dans la diode est connu, il suffit de déterminer la tension à ses bornes en utilisant l'expression de cette tension fournie par le modèle correspondant.

11. Redressement simple alternance **

Dans le montage de la figure 7.24, la diode est supposée idéale (caractéristique de la figure 7.9-b). Tracer la tension $u(t)$ aux bornes de R. On donne $E_0 = 3$ V et $\omega = 2\pi \times 50$ rad/s.

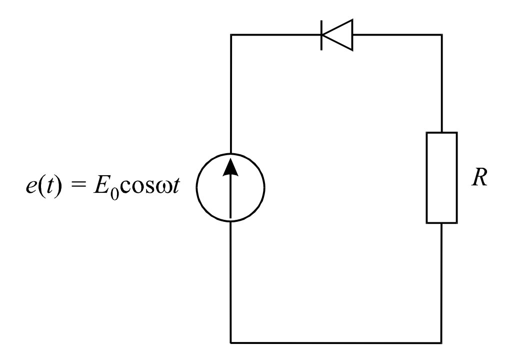


Figure 7.24

Conseil méthodologique

La tension appliquée au circuit étant variable, l'état de la diode est susceptible d'évoluer au cours du temps. On s'attachera donc à étudier les conditions pour lesquelles la diode est passante ou bloquée.

12. Écrêteur à diodes ***

Dans le schéma de la figure 7.25, déterminer et tracer l'évolution de $u(t)$.
On donne : $e(t) = E_0 \sin \omega t$, $E_0 = 30$ V, $\omega = 2\pi \times 50$ rad/s.
E_1 et E_2 sont deux sources de tensions continues parfaites : $E_1 = 10$ V et $E_2 = 15$ V. Les diodes sont supposées idéales (tension de seuil nul, caractéristique de la figure 7.9-b).

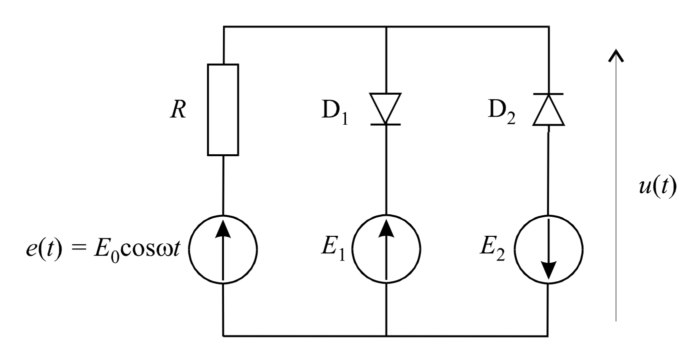


Figure 7.25

Conseil méthodologique

Il convient ici de chercher les conditions pour lesquelles chaque diode est passante ou bloquée. On raisonnera sur ces conditions et sur leurs conséquences sur le comportement électrique du circuit.

13. Puissance consommée par une diode Zener **

Dans le circuit de la figure 7.26, déterminer la puissance P_D dissipée dans la diode Zener, ainsi que la puissance P_1 dissipée dans la résistance. Montrer que $P_D + P_1$ correspond bien à la puissance P_0 fournie par le générateur. La diode Zener est caractérisée par une tension $V_Z = 12$ V. On donne $E = 20$ V et $R = 80\ \Omega$.

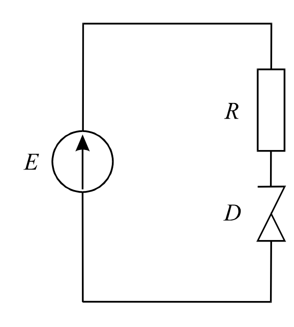


Figure 7.26

Conseil méthodologique

La diode Zener est bien polarisée en sens inverse et présente donc à ses bornes une tension quasiment constante. On veillera à orienter cette tension convenablement avant de déterminer les différentes puissances mises en jeu.

14. Redressement double alternance par pont de diodes **

On considère le montage de la figure 7.27 avec $e(t) = E_0 \sin \omega t$, $E_0 = 50$ V et $\omega = 2\pi \times 50$ rad/s. Les diodes sont supposées idéales (caractéristique de la figure 7.9-b).

a. Déterminer et tracer les variations de la tension $s(t)$ lorsque $e(t) > 0$.

b. Déterminer et tracer les variations de la tension $s(t)$ lorsque $e(t) < 0$.

c. Tracer les variations de $s(t)$ dans le cas général et calculer la valeur moyenne de la tension $s(t)$.

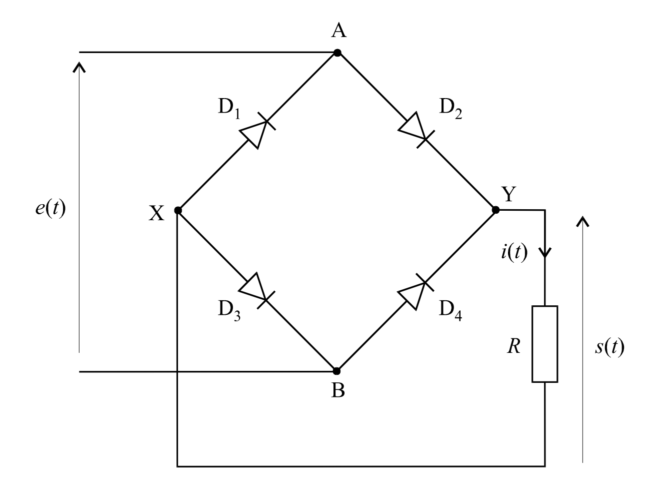


Figure 7.27

Conseil méthodologique

L'état des diodes détermine ici, une fois de plus, le comportement du circuit. Pour chaque diode, l'état dépend de la valeur instantanée de la tension d'alimentation.

15. Limitation de puissance dans un circuit à diodes ***

Deux diodes supposées parfaites supportent chacune une puissance maximale $P_{max} = 200$ mW. Ces diodes sont placées dans le circuit de la figure 7.28 et on se propose d'ajuster la valeur de R pour qu'aucune des deux diodes ne consomme une puissance supérieure à P_{max}.

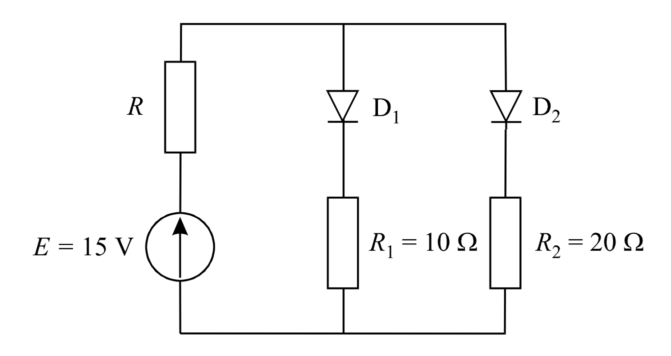


Figure 7.28

a. Montrer que les deux diodes sont passantes.

b. Calculer les expressions des courants circulant dans les deux diodes. En déduire que la puissance dissipée dans la diode D_1 est la plus importante.

c. Déterminer la condition sur R pour que la puissance dissipée dans chaque diode soit inférieure à P_{max}.

Conseil méthodologique

Une fois prouvé l'état passant de chacune des deux diodes, l'objectif consiste à chercher laquelle des deux diodes dissipe le plus de puissance. C'est bien cette puissance qu'il faut alors limiter.

Réponses

1. Supposons que la diode soit bloquée. Dans ce cas, aucun courant ne circule dans la diode et les deux résistances forment un diviseur de tension.

On a donc : $$V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{40}{140} \times 10 \text{ V} = 2{,}8 \text{ V}$$

La diode présenterait donc une différence de potentiel à ses bornes de 2,8 V, ce qui est impossible. La diode est donc passante et présente à ses bornes une différence de potentiel de 0,7 V.

Calculons maintenant le courant I dans la diode. Soit I_1 le courant dans R_1 et I_2 le courant dans R_2. Orientons ces trois courants vers le bas.

On a : $$I_1 = \frac{E - V_A}{R_1} = \frac{10 - 0{,}7}{100} = 93 \text{ mA} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{0{,}7}{40} = 17{,}5 \text{ mA}$$

D'après la loi des nœuds en A : $$I = I_1 - I_2 = 75{,}5 \text{ mA}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On retiendra essentiellement la technique qui consiste à déterminer l'état passant ou bloqué d'une diode. Il s'agit là d'un savoir faire essentiel pour initier la résolution d'un circuit comportant ces composants.

2. En utilisant la même technique que dans l'exercice 7.1, supposons que la diode soit bloquée. Aucun courant ne circule dans la résistance R_2. Le circuit se résume à une simple maille. Comme il n'y a pas de chute de potentiel aux bornes de R_2, l'anode et la cathode de la diode sont aux mêmes potentiels. La tension V aux bornes de la diode est nulle, ce qui est tout à fait cohérent avec le fait que la diode soit bloquée.

Si on suppose que la diode est passante, on a obligatoirement $V_A - V_C = 0{,}7$ V.

Or $V_C = 10$ V $\Rightarrow V_C = 10{,}7$ V, ce qui donnerait la configuration de la figure 7.29, qui est manifestement impossible. La diode est donc bien bloquée.

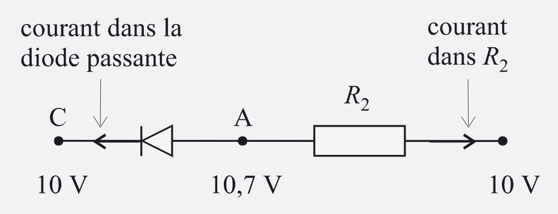


Figure 7.29

Si l'hypothèse diode bloquée ne conduit pas à une absurdité, il vaut mieux, comme ici, vérifier que l'hypothèse diode passante est fausse avant de conclure.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Lorsque l'on n'a aucune idée sur l'état d'une diode, ce qui est souvent le cas, comme ici, l'hypothèse formulée au départ (ici, diode bloquée) ne conduit pas obligatoirement à une absurdité. Cela est un indice fort qui plaide pour l'exactitude de l'hypothèse. Toutefois, nous avons ici fait le choix de vérifier que l'hypothèse contraire conduit bien à une absurdité avant de conclure définitivement.

3. En supposant que la diode soit bloquée, on a affaire à deux diviseurs de tensions.

On a donc : $$\begin{cases} V_A = \dfrac{R_4}{R_3 + R_4} E = 2{,}9 \text{ V} \\ V_C = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E = 6{,}7 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow V_A - V_C = -3{,}8 \text{ V}$$

La diode est bien bloquée. Le lecteur pourra vérifier que l'hypothèse diode passante conduit bien à une absurdité.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Encore un exercice d'entraînement destiné à acquérir la technicité nécessaire pour savoir déterminer l'état d'une diode. Nous nous sommes contentés ici de valider l'hypothèse diode bloquée.

4. En supposant que la diode soit passante, on a $V_A = 10{,}7\,V$, puisque $V_C = 10\,V$. La chute de potentiel aux bornes de la résistance (dirigée positivement vers le haut) impose donc un courant dirigé vers le bas (convention récepteur), qui ne peut en aucun cas traverser la diode. Celle-ci ne peut donc pas être passante.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : On peut facilement montrer qu'une diode est bloquée en raisonnant sur le courant censé la traverser. On suppose qu'elle est passante et si ce n'est pas le cas, on en arrive à la conclusion que le courant qui la traverse circule dans le sens opposé au sens passant, ce qui est, bien sûr, impossible.

5. Si V est la tension en sens direct aux bornes de la diode et I le courant qui la traverse, on a toujours $P = VI$. Comme nous avons choisi le modèle de diode parfaite (figure 7.9-a), on aura $P = 0{,}7\,V \times I$. Il suffit donc de déterminer le courant I. Auparavant, il faut toutefois déterminer si la diode est passante ou bloquée.

Supposons que la diode du schéma de la figure 7.19 est bloquée. Dans ce cas, aucun courant ne circule dans le circuit. Il n'y a donc aucune chute de potentiel aux bornes de la résistance. Par conséquent, la diode présente à ses bornes une tension de 10 V dans le sens direct, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de départ.

La diode est donc passante et présente à ses bornes une tension égale à 0,7 V. Il règne alors une différence de potentiels de 9,3 V aux bornes de la résistance qui est donc parcourue par un courant $I = 93$ mA.

On a donc : $P = 0{,}7\,V \times 93$ mA65 mW.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Le calcul de la puissance dissipée dans une diode ne pose pas de difficulté. Il suffit de connaître la tension à ses bornes et le courant qui la traverse. La connaissance de la puissance dissipée par une diode est importante car toute diode est caractérisée par une puissance maximale admissible.

6. Supposons que la diode soit passante. Il règne donc à ses bornes une tension de 0,7 V, dirigée positivement vers le bas. Cette même tension se trouve aux bornes de la résistance R_1 qui est donc parcourue par un courant I_1, dirigé vers le haut, tel que :

$$I_1 = \frac{0{,}7}{50} = 14 \text{ mA}$$

La tension aux bornes de la résistance R_2 est égale à 10,7 V (dirigée vers le haut), compte tenu de la loi des mailles. Cette résistance est donc parcourue par un courant I_2, dirigé vers le bas, tel que :

$$I_2 = \frac{10{,}7}{70} = 153 \text{ mA}$$

Compte tenu de la loi des nœuds, le courant circulant dans la diode, soit I_3, a pour valeur :

$$I_3 = I_1 + I_2 = 167 \text{ mA}$$

Ce courant est nécessairement dirigé vers le bas, ce qui est incompatible avec l'hypothèse diode passante.

La diode est donc bloquée. Elle n'est parcourue par aucun courant. On a donc $P = 0$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Dans un circuit à plusieurs mailles, une hypothèse fausse concernant l'état d'une diode conduit rapidement à mettre en défaut les lois de Kirchhoff. C'est ce que nous avons fait ici en montrant que la loi des nœuds appliquée au point commun des trois éléments aboutit à une absurdité.

7. Supposons que la diode soit bloquée. N'étant parcourue par aucun courant, elle est équivalente à un circuit ouvert. Le générateur débite donc dans une résistance de 150Ω et un courant $I = \dfrac{10}{150} = 67$ mA parcourt l'unique maille du circuit. La résistance R_1 présentera donc à ses bornes, une différence de potentiels $V = 100 \times 0{,}067 = 6{,}7$ V, dirigée vers la gauche. Cette même tension se trouvant aux bornes de la diode, celle-ci ne saurait être bloquée. La diode est donc passante.

Elle présente donc à ses bornes (et donc aux bornes de R_1), une différence de potentiels de 0,7 V dirigée vers la gauche. Un courant I_1, dirigé vers la droite, traverse la résistance R_1 :

$$I_1 = \frac{0{,}7}{100} = 7 \text{ mA}$$

Par ailleurs, la résistance R_2 présente à ses bornes une tension de 9,3 V, conformément à la loi des mailles. Elle est donc parcourue par un courant I_2, dirigé vers le bas, tel que :

$$I_2 = \frac{9{,}3}{50} = 186 \text{ mA}$$

Il suffit d'appliquer la loi des nœuds pour déterminer le courant I_3 qui circule dans la diode et vers la droite :

$$I_3 = I_2 - I_1 = 179 \text{ mA}$$

Pour conclure : $P = 0{,}179 \times 0{,}7 = 125$ mW

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre comment raisonner sur le fait qu'une diode bloquée est équivalente à un circuit ouvert.

8. On est bien évidemment tenté de procéder exactement comme pour l'exercice précédent. Supposons donc à nouveau que la diode soit bloquée. N'étant parcourue par aucun courant, elle est équivalente à un circuit ouvert. Le générateur débite donc dans une résistance de 3 010 Ω et un courant $I = \dfrac{10}{3\,010} = 3{,}3$ mA parcourt l'unique maille du circuit. La résistance R_1 présentera donc à ses bornes, une différence de potentiels $V = 10 \times 0{,}0033 = 0{,}33$ V, dirigée vers la gauche.

Cette même tension se trouve aux bornes de la diode et elle est insuffisante pour rendre la diode passante. La diode est bien bloquée.

On a donc : $P = 0$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Si on compare le résultat avec celui de l'exercice précédent, nous venons de montrer que le même circuit, si on en change les valeurs de quelques composants, peut se comporter de manière fort différente. De plus, le résultat obtenu ici montre qu'il ne suffit pas de montrer que la diode est soumise à une tension positive en sens direct car cette tension doit être suffisante pour polariser correctement la diode. Une tension de 0,33 V est bien imposée à la diode en sens direct mais elle est bel et bien insuffisante pour rendre la diode passante.

9. La tension V aux bornes de la diode a pour expression : $V = V_S + r_d I$.

La loi des mailles nous donne par ailleurs l'équation : $E = RI + V_S + r_d I$

On a donc : $$R = \frac{E - V_S}{I} - r_d = \frac{5 - 0{,}7}{20 \times 10^{-3}} - 10 = 205\ \Omega$$

Si on utilise le modèle de diode parfaite, on a : $V = 0{,}7$ V et la loi des mailles s'écrit à présent :

$$E = RI + 0{,}7 \text{ V}$$

On a donc : $$R = \frac{E - 0{,}7}{I} = \frac{5 - 0{,}7}{20 \times 10^{-3}} = 215\ \Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Cet exercice montre d'une part, que le modèle de la figure 7.9 (c) est très facile à utiliser, et d'autre part qu'on ne commet pas une erreur très importante en négligeant r_d c'est-à-dire en choisissant le modèle de la diode parfaite, surtout lorsque la diode est placée, comme ici, en série avec une résistance $R \gg r_d$.

10. La puissance dissipée dans une diode parcourue par un courant I et présentant à ses bornes une tension V est égale à $P = VI$. En utilisant le modèle avec résistance dynamique, on a :

$$P = (V_S + r_d I)I = (0{,}7 + 3 \times 25 \times 10^{-3}) \times 25 \times 10^{-3} = 19{,}3 \text{ mW}$$

En utilisant le modèle de la diode parfaite, on obtient :

$$P = V_S\, I = 0{,}7 \times 25 \times 10^{-3} = 17{,}5 \text{ mW}$$

Avec le modèle réel : $P = VI = V_0 \ln\left(\frac{I}{I_s}\right) \cdot I = 18{,}8$ mA

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Les écarts entre les différentes valeurs sont somme toute assez faibles. Dans une diode passante, le calcul de la puissance se fera sauf mention contraire expresse, à l'aide du modèle de diode parfaite (figure 7.9 a), puisqu'aucune différence notable de précision n'est relevée à l'aide des deux modèles plus fins. Nous remarquerons qu'il n'est évidemment pas possible d'utiliser le modèle idéal (figure 7.9 b), puisque dans ce cas, la tension aux bornes de la diode est supposée nulle et qu'aucun calcul de puissance n'est possible.

11. La diode est bloquée si et seulement si sa différence de potentiel en sens direct est négative : soit $u(t) - e(t) < 0$. Dans ce cas, aucun courant ne circulant dans le circuit, on a $u(t) = 0$. Donc, la diode est bloquée si et seulement si $e(t) > 0$. On a alors $u(t) = 0$. Dans le cas contraire : $e(t) < 0$, la diode est passante et comme nous considérons sa caractéristique comme idéale, on a alors $u(t) = e(t)$. Soit le tracé de la figure 7.30.

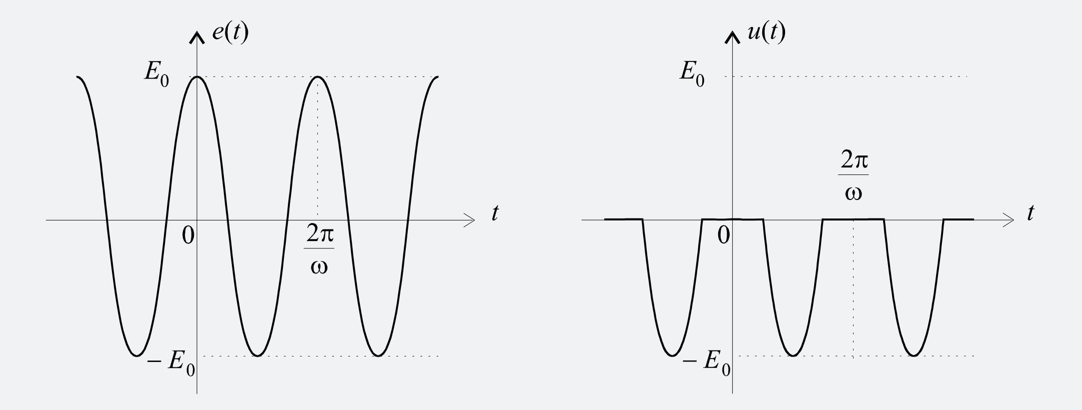


Figure 7.30

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : En régime sinusoïdal et d'une manière générale en régime variable, une diode est susceptible d'être alternativement passante et bloquée. Cette propriété est ici utilisée pour éliminer les demi-alternances positives du signal d'alimentation. C'est ce qu'on appelle le redressement simple alternance, la diode étant en effet un des composants de base de la fonction de redressement que nous étudierons plus en détail dans le problème 7.1.

12. Les conditions pour lesquelles les diodes sont bloquées sont :

$$\begin{cases} u(t) > -E_2 \Leftrightarrow D_2 \text{ bloquée} \\ u(t) < -E_1 \Leftrightarrow D_1 \text{ bloquée} \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque ces deux diodes sont bloquées simultanément, et seulement dans ce cas, on a : $u(t) = e(t)$.

On en déduit donc : $$-E_2 < e(t) < E_1 \Leftrightarrow u(t) = e(t)$$

Si $e(t) > E_1$, la diode D_1 devient passante. Comme elle supposée idéale, la tension à ses bornes est nulle, on a donc : $e(t) > E_1 \Leftrightarrow u(t) = E_1$

Si $e(t) < -E_2$, la diode D_2 devient passante et on a : $e(t) < -E_2 \Leftrightarrow u(t) = -E_2$
Traçons $u(t)$ (figure 7.31) :

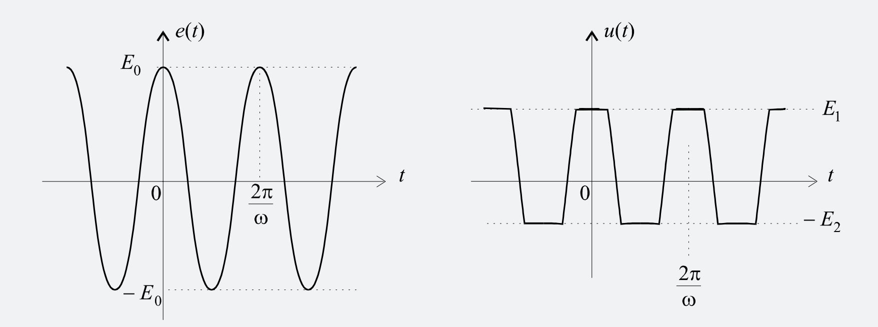


Figure 7.31

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Ce montage est un écrêteur à diodes, autrement dit un montage qui supprime les extrémités d'un signal. Lorsqu'une diode bascule de l'état bloqué dans l'état passant, elle court-circuite la sortie sur le générateur de tension continue auquel elle est connectée.

13. La diode Zener est bien polarisée en sens inverse. Elle est donc passante et présente à ses bornes une différence de potentiel en sens inverse égale à $V_Z = 12$ V.

Soit I le courant dans le circuit. On a : $I = \dfrac{E - V_Z}{\mathrm{R}} = \dfrac{20 - 12}{80} = 100$ mA

D'où :
$$\begin{cases} P_D = V_Z I = 12 \times 0{,}1 = 1{,}2 \text{ W} \\ P_1 = RI^2 = 80 \times (0{,}1)^2 = 0{,}8 \text{ W} \end{cases}$$

La puissance fournie par le générateur vaut : $P_0 = EI = 20 \times 0{,}1 = 2$ W

On a bien :
$$P_0 = P_D + P_1$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Une diode Zener se polarise toujours en sens inverse puisqu'elle est employée pour sa propriété particulière qui consiste à maintenir une tension négative pratiquement constante à ses bornes.

14.

a. Pendant la demi-alternance positive (figure 7.32), on a $V_A > V_B$. V_A se trouve être la tension la plus élevée dans le circuit.

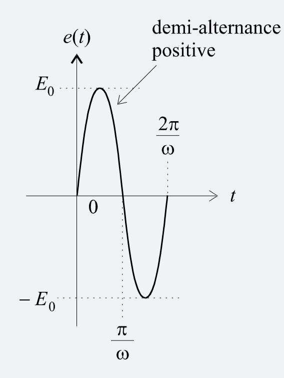


Figure 7.32

La diode D_2 ne peut être bloquée car cela impliquerait $V_Y > V_A$. Donc D_2 est passante et $V_Y = V_A$. La diode D_3 ne peut être bloquée car cela impliquerait $V_X < V_B$. V_B étant la tension la plus faible du circuit, imposée par l'alimentation, ceci est impossible. La diode D_3 est donc passante et on a $V_X = V_B$.

Par ailleurs : $$\left.\begin{array}{l} V_A > V_B \\ V_X = V_B \\ V_Y > V_A \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} V_A > V_X \Rightarrow D_1 \text{ bloquée} \\ V_Y > V_B \Rightarrow D_4 \text{ bloquée} \end{cases}$$

Le schéma de la figure 7.26 est donc équivalent au schéma de la figure 7.33 pour cette demi-alternance positive et la tension $s(t)$ est égale à $e(t)$ (figure 7.34).

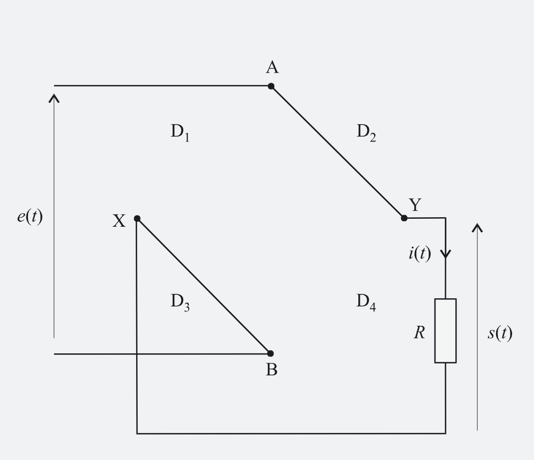


Figure 7.33

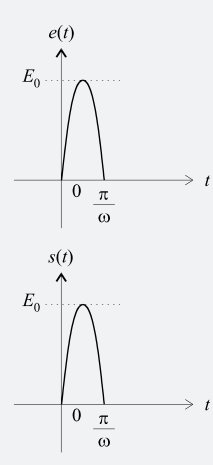


Figure 7.34

b. Pendant la demi-alternance négative, on a : $V_A < V_B$. V_A se trouve être la tension la plus basse dans le circuit, tandis que V_B est la tension la plus élevée. Cette fois-ci, ce sont les diodes D_1 et D_4 qui sont passantes et les diodes D_2 et D_3 sont bloquées. Le circuit est donc équivalent au schéma de la figure 7.35. On a : $s(t) = -e(t)$. Les variations de $s(t)$ sont représentées sur la figure 7.36.

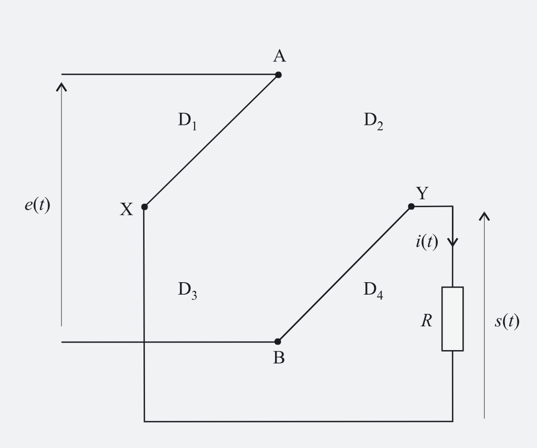


Figure 7.35

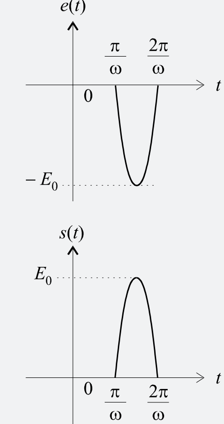


Figure 7.36

c. Rassemblons les deux cas sur un seul graphe (figure 7.37).

Calculons à présent la composante continue du signal $s(t)$, autrement dit sa valeur moyenne. La valeur moyenne sur un intervalle de temps $[a,b]$ d'une fonction du temps est donnée par la relation :

$$\overline{s} = \frac{1}{b-a}\int_a^b s(t)\mathrm{d}t$$

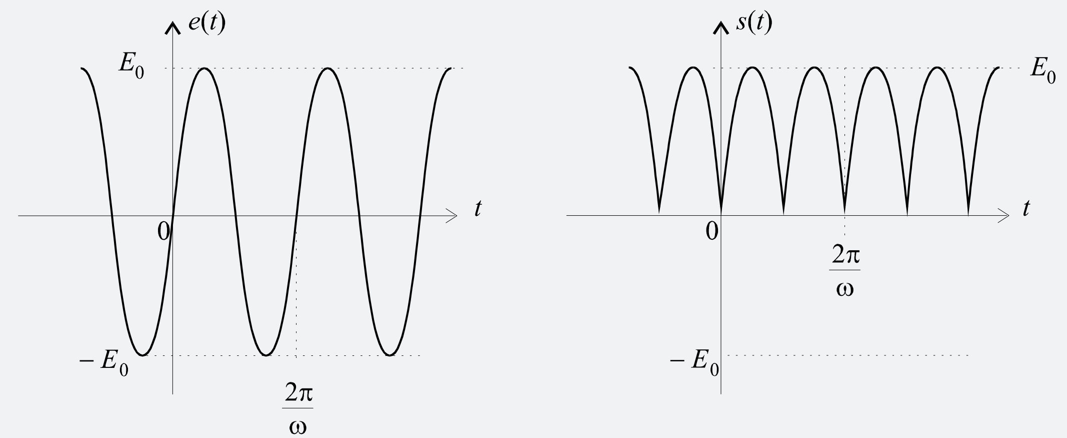


Figure 7.37

Pour une fonction périodique, cette valeur moyenne se calcule sur une période. La tension $s(t)$ étant périodique de période π/ω, on a :

$$\overline{s} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E_0 \omega t \mathrm{d}t$$

Soit :
$$\overline{s} = \frac{\omega E_0}{\pi} \left[\frac{-\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{E_0}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2E_0}{\pi}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Ce montage est un grand classique. Il s'agit du redresseur double alternance encore appelé **pont de Graetz** ou pont de diodes. Il sert de base à la transformation d'une tension sinusoïdale en une tension continue. La valeur moyenne obtenue est la composante continue du signal redressé.

15.

a. Chacune des deux diodes est passante. En effet, supposons que D_1 soit bloquée : aucun courant ne circule dans R_1. La cathode de la diode se trouve donc à la masse. Pour que la diode soit effectivement bloquée, il faudrait donc que son anode soit à un potentiel négatif, ce qui est impossible. D_1 est donc passante. Le raisonnement est exactement le même pour D_2.

2. En formulant comme hypothèse qu'une différence de potentiel de 0,7 V règne aux bornes de chaque diode, nous aurons accès aux puissances dissipées dans chacune d'elles en calculant les courants I_1 et I_2 respectivement dans R_1 et R_2 (figure 7.38).

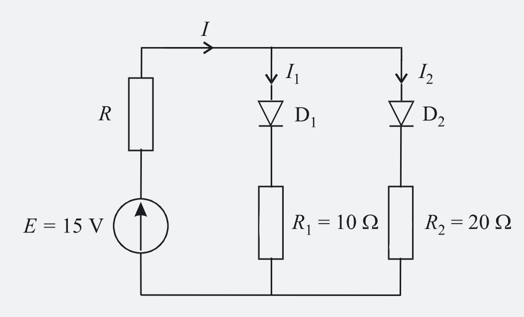


Figure 7.38

La loi des mailles nous donne deux équations :

$$E - RI - 0{,}7\ \text{V} - R_1 I_1 = 0$$
$$R_1 I_1 + 0{,}7\ \text{V} - 0{,}7\ \text{V} - R_2 I_2 = 0$$

La loi des nœuds en A nous donne $I = I_1 + I_2$. On obtient donc $I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1$.

Puis : $$E - RI_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - 0{,}7\,\text{V} - R_1 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E - 0{,}7\,\text{V}}{R\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1}$$

ainsi : $$I_2 = \frac{E - 0{,}7\,\text{V}}{R\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Comme $R_2 > R_1$, on aura $I_2 < I_1$. C'est donc dans D_1 que la puissance dissipée sera la plus importante, quoiqu'il arrive.

b. Nous allons donc calculer R pour avoir une puissance dissipée maximale P_{max} dans D_1 :

$$I_1 \times 0{,}7\,\text{V} < P_{max} \Rightarrow \frac{E - 0{,}7\,\text{V}}{R\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1} \times 0{,}7\,\text{V} < P_{max}$$

Soit :

$$\frac{(E - 0{,}7\,\text{V}) \times 0{,}7\,\text{V}}{P_{max}} < R\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R \text{ D'où : } R > \frac{\frac{(E - 0{,}7\,\text{V}) \times 0{,}7\,\text{V}}{P_{max}} - R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \Rightarrow R > 26{,}7\ \Omega$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice : Les diodes sont des composants fragiles qui ne peuvent pas dissiper de puissance au-delà d'une certaine limite pour laquelle elles ont été conçues. Dans un circuit comportant plusieurs diodes, il convient de chercher les conditions qui permettent de faire en sorte qu'aucune diode ne soit susceptible d'être soumise à une puissance supérieure à cette limite.

Formulaire

Ce formulaire rassemble les formules de mathématiques les plus fréquemment utilisées dans les problèmes d'électrocinétique.

Trigonométrie

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\tan(\pi + x) = \tan x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2\sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$
- $\cos p + \cos q = 2\cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\tan(\pi - x) = \tan x$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$
- $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
- $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
- $\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p + q)}{\cos p \cos q}$

Nombres complexes

- $z = a + jb$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z^*| = |z|$
- $z^* z = |z|^2$
- $e^{jx} = \cos x + j\sin x$
- $(\cos x + j\sin x)^n = \cos nx + j\sin nx$
- $z^* = a - jb$
- $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$
- $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$
- $\arg z = \arctan \dfrac{b}{a}$

- $\arg z^* = -\arg z$
- $z = |z|\, e^{j \arg z}$
- $\left(\rho e^{j\theta}\right)^* = \rho e^{-j\theta}$

Dérivées

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(u[v(x)])' = (u \circ v(x))' = u'[v(x)] \times v'$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Infiniment petits ($x \to 0$)

- $(1+x)^n \approx 1 + nx$
- $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$
- $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$
- $\ln(1+x) \approx x$
- $\sin x \approx x$ (x en rad)
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ (x en rad)
- $(1-x)^n \approx 1 - nx$
- $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$
- $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$
- $e^x \approx 1 + x$
- $\tan x \approx x$ (x en rad)

Primitives et intégrales

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{te}$
- $\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C^{te}$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C^{te}$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C^{te}$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C^{te}$
- $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C^{te}$
- $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C^{te}$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C^{te}$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C^{te}$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C^{te}$

Index

S

T

V

Z